

# Методы редукции и параллельные технологии решения СЛАУ

Я.Л.Гурьева, В.П.Ильин

Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирский государственный университет

ПАВТ - 2015

Екатеринбург, 2 апреля 2015 г.

1. Декомпозиция областей с параметризованными перекрестками
2. Интерфейсные условия на смежных границах подобластей
3. Аддитивный метод Шварца в подпространствах Крылова
4. Методы агрегации
5. Численные эксперименты

1. Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. Springer Series in Comput. Math. 2005. Vol. 34. 450 p.
2. Bridson R., Greif C. A multipreconditioned conjugate gradient algorithm // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. Vol. 27, N 4. P. 1056–1068.
3. Dubois O., Gander M.J., St-Cyr A., Loisel S., Szyld D. The Optimized Schwarz Method with a Coarse Grid Correction // SIAM Journal on Scientific Computing. 2012. Vol. 34, N 1. P. 421-458.
4. Ильин В.П. Параллельные методы и технологии декомпозиции областей // Вестник ЮУрГУ. Серия “Вычислительная математика и информатика”. 2012. N 46(305). С. 31–44.

5. Chapman A., Saad Y. Deflated and augmented Krylov subspace technique // Numer. Linear Algebra Applic. 1997. Vol. 4, N 1. P. 43-66.
6. Бутюгин Д.С., Гурьева Я.Л., Ильин В.П., Перевозкин Д.В., Петухов А.В., Скопин И.Н. Функциональность и технологии алгебраических решателей в библиотеке Krylov // Вестник ЮУрГУ. Серия “Вычислительная математика и информатика”. 2013. Т. 2. N 3. P. 92-105.
7. URL: <http://www.ddm.org>

## Постановка задачи

$$Au = f, \quad A = \{a_{l,l'}\} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad u = \{u_l\}, \quad f \in \mathcal{R}^N,$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u|_{\Gamma} = g(x, y),$$

$$\Omega^h = \bigcup_{s=1}^P \Omega_s^h, \quad N_s \cong N/P, \quad \sum_{s=1}^P N_s = N,$$

$$A_{s,s} \bar{u}_s + \sum_{s' \in Q_s} A_{s,s'} \bar{u}_{s'} = f_s, \quad s = 1, \dots, P, \quad \bar{u}_s \in \mathcal{R}^{N_s}$$

$$\Gamma_s = \Gamma_s^0, \quad \bar{\Omega}_s^0 = \Omega_s \cup \Gamma_s^0,$$

$$\bar{\Omega}_s = \bar{\Omega}_s^\Delta = \Omega_s^\Delta \cup \Gamma_s^\Delta$$

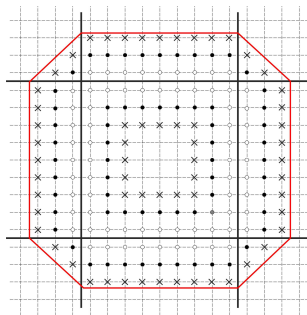


Рис.1. Расширение сеточной подобласти для  $\Delta = 3$

# Интерфейсные условия

$$(a_{l,l} + \theta_l \sum_{l' \notin \Omega_s^\Delta} a_{l,l'}) u_l^n + \sum_{l \in \Omega_s^\Delta} a_{l,l'} u_{l'}^n = f_l + \sum_{l' \notin \Omega_s^\Delta} a_{l,l'} (\theta_l u_l^{n-1} - u_{l'}^{n-1})$$

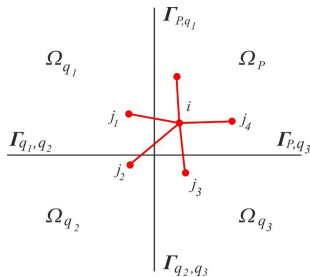


Рис.2. Сеточный шаблон для околограничного узла

$$\bar{B}_s(\tilde{u}_s^{n+1} - \tilde{u}_s^n) = \tilde{f}_s^n - (\bar{A}\tilde{u}^n)_s \equiv \tilde{r}_s^n,$$

$$u^{n+1} = u^n + B_{ras}^{-1}r^n, \quad B_{ras}^{-1} = R\hat{A}^{-1}W^T,$$

$$W = (w_1 \dots w_p)^T \in \mathcal{R}^{N,P},$$

$$\hat{A} = W^T, \quad AW = \text{block-diag} \{A_s \in \mathcal{R}^{\bar{N}_s, \bar{N}_s}\},$$



$$u = \{u_l \approx u_l^c = \sum_{k=1}^{N_c} c_k \varphi_k(x_l, y_l)\} = \Phi \hat{u} + \psi,$$

$$\sum_{k=1}^{N_c} \varphi_k(x, y) = 1,$$

$$A\Phi \hat{u} = f - A\psi, \quad \Phi = [\varphi_1 \dots \varphi_{N_c}] \in \mathcal{R}^{N, N_c},$$

$$\hat{A} \hat{u} \equiv \Phi^T A \Phi \hat{u} = \Phi^T f - \Phi^T A \psi \equiv \hat{f} \in \mathcal{R}^{N_c},$$

$$\hat{A} \check{u} = \Phi^T f \equiv \check{f},$$

$$u \approx \tilde{u} = \Phi \check{u} = \Phi \hat{A}^{-1} \hat{f} = B_c^{-1} f, \quad B_c^{-1} = \Phi (\Phi^T A \Phi)^{-1} \Phi^T,$$

$$u^0 = u^{-1} + B_c^{-1} r^{-1}, \quad r^{-1} = f - Au^{-1},$$

$$r^0 = f - Au^0 \perp \Phi = \mathbf{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_c}\}$$

$$p^0 = (I - B_c^{-1}A)r^0, \quad \Phi^T A p^0 = 0,$$

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_n p^n, \quad r^{n+1} = r^n - \alpha_n A p^n,$$

$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta_n p^n - B_c^{-1} A r^{n+1},$$

$$\alpha_n = (r^n, r^n) / (p^n, A p^n), \quad \beta_n = (r^{n+1}, r^{n+1}) / (r^n, r^n),$$

$$\Phi^T r^{n+1} = 0, \quad \Phi^T A p^{n+1} = 0$$

1. “Доитерационные” операции:
  - декомпозиция области
  - формирование “распределенных” СЛАУ
2. Реализация внешних итераций
  - обмены между подобластями средствами MPI
  - вызовы “внутренних” решателей
  - грубосеточная коррекция
3. Многопоточковая реализация решения СЛАУ в подобластях (OPENMP)

$$\|r^n\|_2 \leq 10^{-8} \|f\|_2, \quad u = x^2 - y^2, \quad u^0 = 0,$$

$$N_c = (P_x + 1)(P_y + 1), \quad \varphi_k(x, y) = \hat{\psi}_I(x) \check{\psi}_J(y),$$

$$\hat{\psi}_I(x_{I'}) = \delta_{I, I'}, \quad \check{\psi}_J(y_{J'}) = \delta_{J, J'},$$

$$I = 0, 1, \dots, P_x; \quad J = 0, 1, \dots, P_y,$$

$$X_I \leq x_I \leq X_{I+1}, \quad Y_J \leq y_J \leq Y_{J+1}$$

**Табл. 1. Количество итераций BiCGStab для  $\Delta = 0, 1, 2, p = q = 0$**

$N \setminus P$	$2^2$	$4^2$	$8^2$
$64^2$	19 11 8	26 15 12	37 20 15
	16 9 7	21 12 9	27 15 11
$128^2$	27 15 11	34 22 17	51 31 21
	22 14 10	25 16 12	32 21 15
$256^2$	37 21 17	54 31 23	72 43 32
	33 18 15	35 21 17	41 26 21

Табл. 2. Количество итераций BiCGStab для  $\Delta = 0, 1, 2, p = q = 4$

$N \setminus P$	$2^2$			$4^2$			$8^2$		
$64^2$	19	10	8	22	13	11	33	16	13
	16	9	8	20	12	9	28	16	13
$128^2$	26	15	12	37	21	16	41	25	18
	26	13	10	30	16	13	41	22	17
$256^2$	36	21	17	55	26	20	55	37	29
	34	19	14	53	23	19	47	31	23

Табл. 3. Количество итераций на сетках  $128^2$  и  $256^2$  при различных параметрах  $\theta$

$P \setminus \theta$	0		0.5		0.6		0.7		0.9975	
4	18	27	16	26	16	24	14	23	10	12
16	32	41	28	40	27	39	27	40	31	75
64	43	60	42	56	40	55	41	55	93	86