

Параллельная численная реализация
пространственно-трехмерной модели
фильтрации двухфазной жидкости
на основе усовершенствованного
попеременно-треугольного метода

Александр Иванович Сухинов (Донской
государственный технический университет,
Ростов-на-Дону), Сухинов А.А., (Сколковский
институт науки и технологий), А.Е. Чистяков,
(Южный ФУ), Л.А. Григорян (СевКавФУ)

Введение

- В рамках модели Баклея-Левретта рассмотрена постановка задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в переменных «давление-водонасыщенность»
- Рассмотрен усовершенствованный итерационный модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ), учитывающий наличие источников (стоков) в относительно малом числе узлов и его параллельная реализация на суперкомпьютере ЮФУ (в г. Таганроге)

Постановка задачи фильтрации

Начально-краевая задача для нелинейных уравнений с частными производными, которые в случае трехмерной постановки задачи двухфазной фильтрации могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{f_1(s)k_h}{\mu_1} + \frac{f_2(s)k_h}{\mu_2} \right) p'_x \right)'_x + \left(\left(\frac{f_1(s)k_h}{\mu_1} + \frac{f_2(s)k_h}{\mu_2} \right) p'_y \right)'_y + \\ & + \left(\frac{f_1(s)k_v(p'_z + g\rho_1)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)k_v(p'_z + g\rho_2)}{\mu_2} \right)'_z + q_1 = 0, \\ ms'_t &= \left(\frac{f_2(s)k_h p'_x}{\mu_2} \right)'_x + \left(\frac{f_2(s)k_h p'_y}{\mu_2} \right)'_y + \left(\frac{f_2(s)k_v(p'_z + g\rho_2)}{\mu_2} \right)'_z + q_2. \end{aligned}$$

Здесь $s(x, y, z, t)$ — водонасыщенность; $p(x, y, z, t)$ — давление; $f_1(s)$, $f_2(s)$ — относительные фазовые проницаемости нефти и воды; m — пористость; μ_1 , μ_2 — вязкости нефти и воды; $k_h(x, y)$, $k_v(x, y)$ — горизонтальная и вертикальная проницаемости пласта; q_1 и q_2 моделируют работу скважин; ρ_1 и ρ_2 — плотности воды и нефти; g — ускорение свободного падения.

Явно-неявная дискретная модель

Решаем задачу в параллелепипеде на равномерной пространственной сетке. Сетка по времени — неравномерная.

Уравнение для давления (неявная схема):

$$\begin{aligned}
 & B_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(1)} \frac{P_{i-1,j,k} - P_{i,j,k}}{h_x^2} - B_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} \frac{P_{i,j,k} - P_{i+1,j,k}}{h_x^2} + B_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(2)} \frac{P_{i,j-1,k} - P_{i,j,k}}{h_y^2} - \\
 & - B_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{h_y^2} + B_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(3)} \frac{P_{i,j,k-1} - P_{i,j,k}}{h_z^2} - B_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k+1}}{h_z^2} + \\
 & + \frac{g\rho_1}{\mu_1} \cdot \frac{(f_{1,i,j,k-1} + f_{1,i,j,k})k_{v,i,j,k-\frac{1}{2}} - (f_{1,i,j,k+1} + f_{1,i,j,k})k_{v,i,j,k+\frac{1}{2}}}{2h_z} + \\
 & + \frac{g\rho_2}{\mu_2} \cdot \frac{(f_{2,i,j,k-1} + f_{2,i,j,k})k_{v,i,j,k-\frac{1}{2}} - (f_{2,i,j,k+1} + f_{2,i,j,k})k_{v,i,j,k+\frac{1}{2}}}{2h_z} = f_{p,i,jk}.
 \end{aligned}$$

Явно-неявная дискретная модель

Явная разностная схема, ориентированная против потока, для уравнения водонасыщенности:

$$\begin{aligned}
 & m \frac{s_{i,j,k}^{n+1} - s_{i,j,k}^n}{\tau_{n+1}} - \left(\delta_1^- f_{2,i-1,j,k} k_{h,i-1,j,k} + \delta_1^+ f_{2,i,j,k} k_{h,i,j,k} \right) \frac{P_{i-1,j,k} - P_{i,j,k}}{\mu_2 h_x^2} + \\
 & + \left(\delta_2^- f_{2,i,j,k} k_{h,i,j,k} + \delta_2^+ f_{2,i+1,j,k} k_{h,i+1,j,k} \right) \frac{P_{i,j,k} - P_{i+1,j,k}}{\mu_2 h_x^2} - \\
 & - \left(\delta_3^- f_{2,i,j-1,k} k_{h,i,j-1,k} + \delta_3^+ f_{2,i,j,k} k_{h,i,j,k} \right) \frac{P_{i,j-1,k} - P_{i,j,k}}{\mu_2 h_y^2} + \\
 & + \left(\delta_4^- f_{2,i,j,k} k_{h,i,j,k} + \delta_4^+ f_{2,i,j+1,k} k_{h,i,j+1,k} \right) \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j+1,k}}{\mu_2 h_y^2} - \\
 & - \left(\delta_5^- f_{2,i,j,k-1} k_{v,i,j,k-1} + \delta_5^+ f_{2,i,j,k} k_{v,i,j,k} \right) \left(\frac{P_{i,j,k-1} - P_{i,j,k}}{\mu_2 h_z^2} + \frac{g \rho_2}{\mu_2 h_z} \right) + \\
 & + \left(\delta_6^- f_{2,i,j,k} k_{v,i,j,k} + \delta_6^+ f_{2,i,j,k+1} k_{v,i,j,k+1} \right) \left(\frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k+1}}{\mu_2 h_z^2} + \frac{g \rho_2}{\mu_2 h_z} \right) = f_s
 \end{aligned}$$

Усовершенствованный итерационный метод попеременно-треугольный метод

Запишем систему уравнений для сеточной функции давления в операторном виде с однородными граничными условиями, изменив соответствующим образом правую часть:

$$Ay = u, \quad Ay = - \sum_{\alpha=1}^3 (a_{\alpha}^{+1} y_{x_{\alpha}})_{\bar{x}_{\alpha}} + qy, \quad x \in \omega,$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

$$u(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi_1(x)}{h_1^2} + \frac{\varphi_2(x)}{h_2^2} + \frac{\varphi_3(x)}{h_3^2}, \quad x \in \omega.$$

Функция источников q в подавляющем числе узлов сетки равна нулю, а в узлах, совпадающих со скважинами имеет δ -образный характер.

Усовершенствованный итерационный метод попеременно-треугольный метод

Представим схему итерационного двухслойного модифицированного попеременно-треугольного метода в виде:

$$(D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_{n+1}} + Ay^n = f,$$
$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{a_{\alpha x_\alpha}}{2h_\alpha} y + \frac{qy}{6} \right),$$
$$R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{a_\alpha^{+1}}{h_\alpha} y_{x_\alpha} + \frac{a_{\alpha x_\alpha}}{2h_\alpha} y - \frac{qy}{6} \right).$$

Операторы R_1 и R_2 являются сопряженными на множестве сеточных функций, обращающихся в ноль на границе сетки:

$$R_1 = -R_2^*, \quad A = R_1 + R_2.$$

Усовершенствованный итерационный метод переменных направлений

Получены оценки для постоянных δ и Δ :

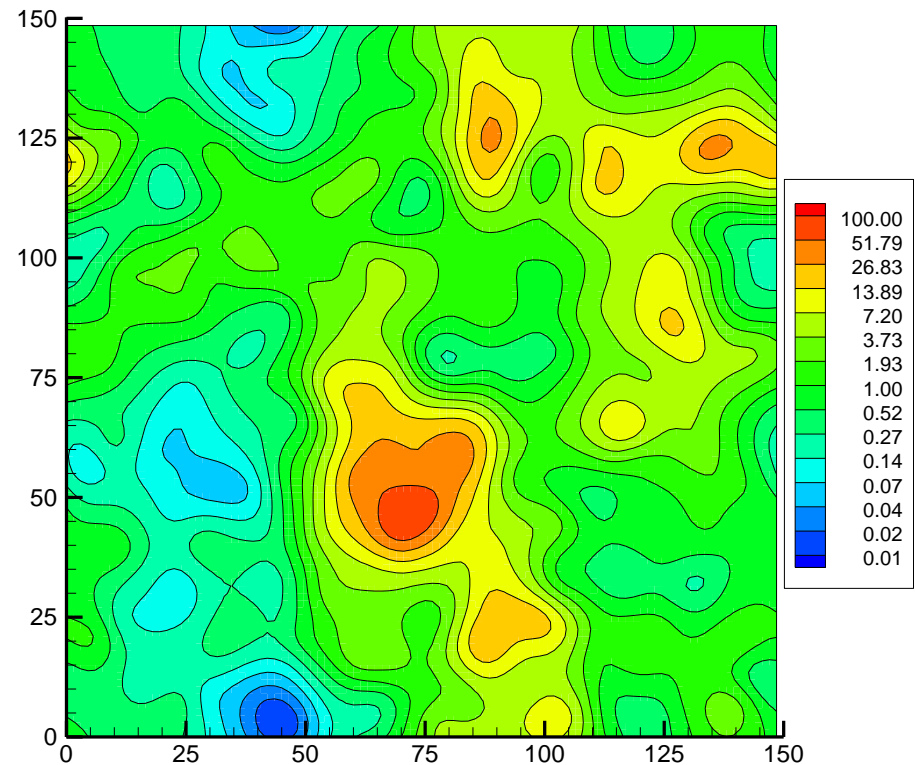
$$\delta D \leq R_1 + R_2, \quad R_1 D^{-1} R_2 \leq \frac{\Delta}{4} (R_1 + R_2),$$

а также сеточная функция, определяющая элементы диагональной матрицы D :

$$d(x) = \sum_{\alpha=1}^3 \left(a_{\alpha}^{+1} + h_{\alpha}^2 \chi_{\alpha} \left| \frac{a_{\alpha} x_{\alpha}}{2h_{\alpha}} - \frac{q}{6} \right| \right) \frac{\theta_{\alpha}}{h_{\alpha}^2}, \quad x \in \omega.$$

Модельная задача

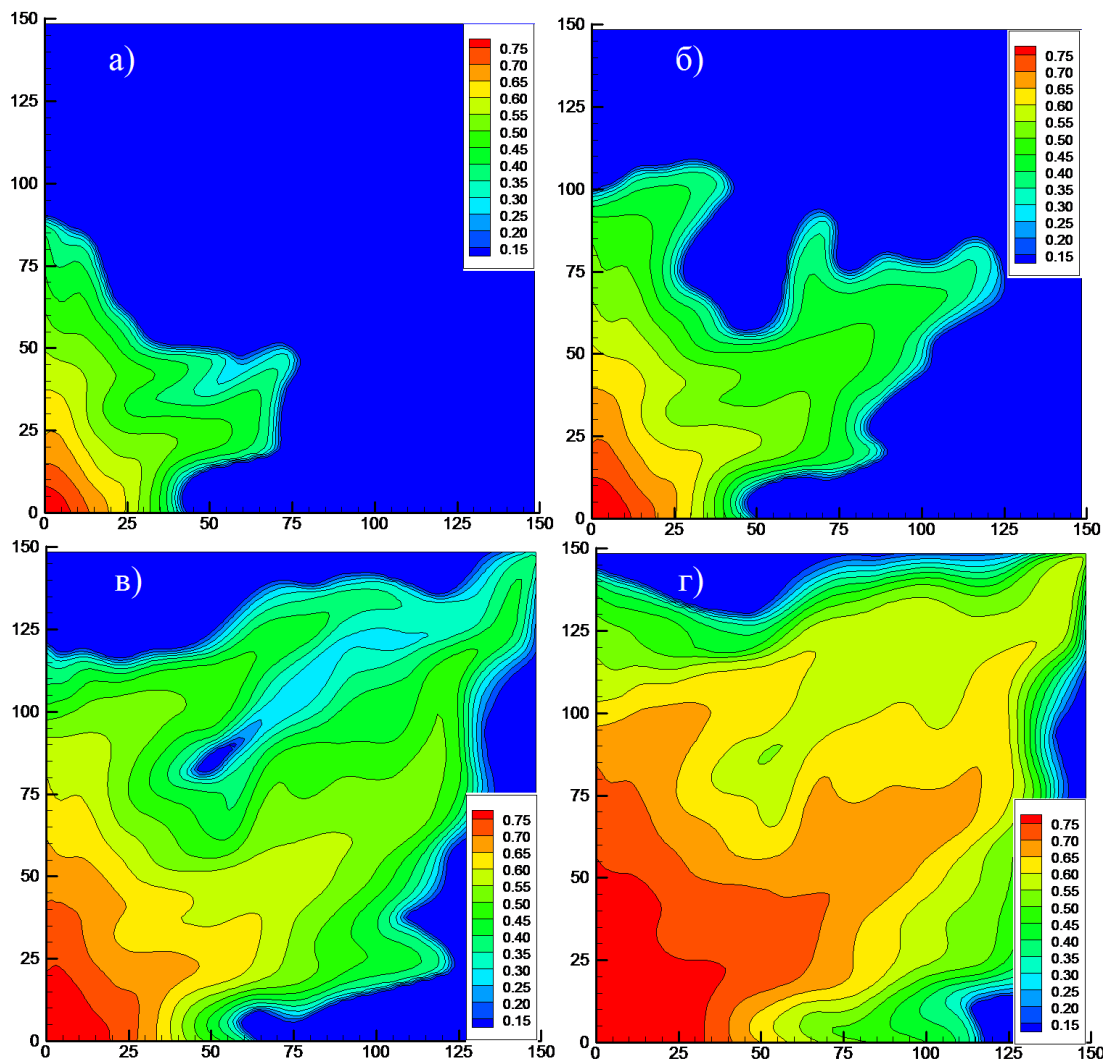
- В качестве базовой проницаемости взято значение 10^{-12} м^2
- Далее базовая проницаемость умножается на неоднородный коэффициент проницаемости, показанный на рисунке (сгенерирован случайно из диапазона 0.01...100 на поле 150×150 метров)
- Разброс значений поля проницаемости составляет 4 порядка



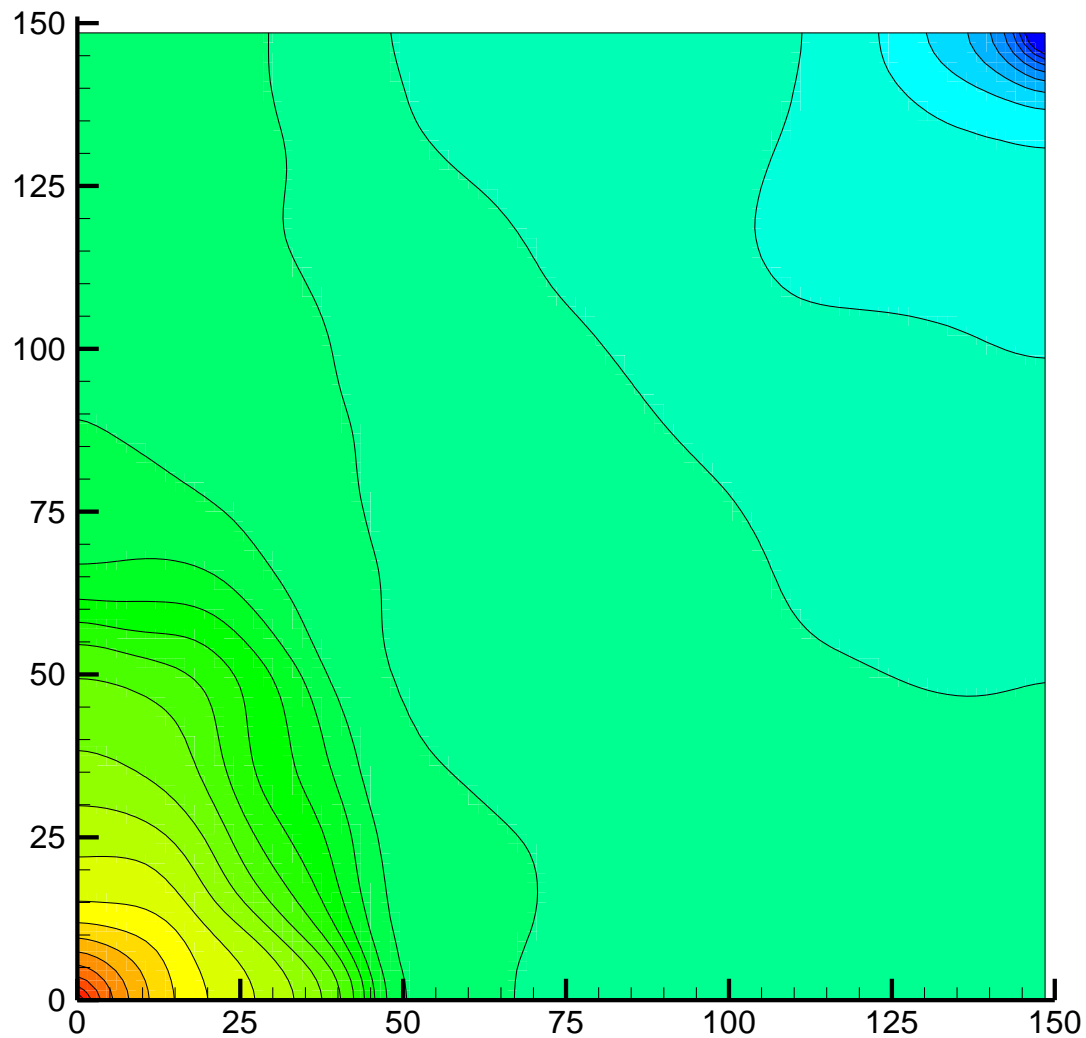
Модельная задача

- Толщина пласта: 10 м.
- Горизонтальные размеры области: 150×150 метров
- Граничные условия — непроницаемые стенки
- Суточные дебиты скважин: в нагнетательную вода закачивалась с дебитом $300 \text{ м}^3/\text{сутки}$, а из эксплуатационной выкачивалась нефтеводоносная смесь с отрицательным дебитом $300 \text{ м}^3/\text{сутки}$
- Проницаемость пласта в зависимости от вертикальной координаты не меняется
- Пространственно-трехмерная сетка: $300 \times 300 \times 20$
- Шаг по времени: 0.003–0,005 сут.
- Сеточное уравнение для функции давления решалось усовершенствованным МПТМ

Распределение водонасыщенности (10, 20, 50, 200 дней)



Давление (50 дней)



Количество итераций

Номер временного слоя	Метод решения сеточных уравнений для функции давления		
	МЗ	МВРШУ	МПТМ
1	37535	7232	752
2	23347	3243	314
3	14138	2172	196
4	13190	1918	188
5	12932	1863	184

Параллельная реализация

- Для параллельного решения модельной пространственно-трехмерной задачи фильтрации использовался установленный в Таганроге и эксплуатируемый с 2010 г. НРС-кластер Южного Федерального университета, который представляет собой многопроцессорную вычислительную систему с распределенной памятью, состоящую из 128 вычислительных узлов и общим числом ядер — 2048
- Декомпозиция по одному координатному направлению дает приемлемые значения эффективности при относительно небольшом числе используемых вычислительных ядер порядка 10–15
- Поэтому была применена декомпозиция по двум координатным направлениям, при этом смежные области перекрываются двумя строками или столбцами узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения

Параллельная реализация

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

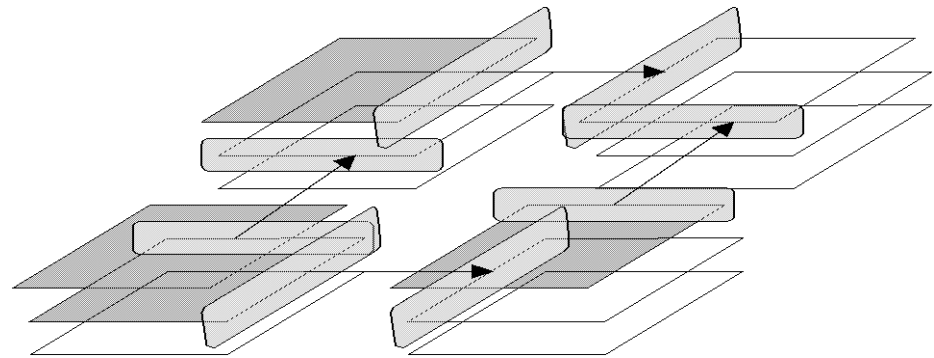
$$(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)\hat{w}_{m+1} = \hat{r}_m,$$

где R_1 — нижне-треугольная матрица, а R_2 — верхне-треугольная матрица. Для вычисления вектора поправки нужно последовательно решить два уравнения:

$$\begin{aligned}(D + \omega_m R_1)\hat{y}_{m+1} &= \hat{r}_m, \\ (D + \omega_m R_2)\hat{w}_{m+1} &= D\hat{y}_{m+1}.\end{aligned}$$

Параллельная реализация

- Вначале вычисляется вектор u_m , при этом расчет начинается в левом нижнем углу
- Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки w_m
- На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам
- На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи — первый



Эффективность параллельного алгоритма

Количество процессоров	Ускорение	Эффективность
1	1	1
2	1,90	0,95
4	3,12	0,78
8	5,96	0,74
16	9,76	0,63
32	17,92	0,56
64	31,36	0,49
128	47,1	0,37
256	46,6	0,18

Заключение

- Данный алгоритм позволил добиться ускорения более чем в 46 раз на 128 ядрах (по сравнению с последовательным алгоритмом)
- Позволяет в 300–2000 раз уменьшить время решения задачи по сравнению с последовательными реализациями метода Зейделя и метода верхней релаксации с шахматной упорядоченностью узлов при решении модельных задач с числом узлов до 3 200 000
- Время решения меньше в 10–60 раз по сравнению с параллельными аналогами метода Зейделя