

# Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах\*

А.И. Сухинов<sup>1,2</sup>, Е.А. Проценко<sup>2</sup>, А.Е. Чистяков<sup>1</sup>, С.А. Шретер<sup>2</sup>

Южный федеральный университет<sup>1</sup>,  
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ)<sup>2</sup>

В статье рассмотрена нестационарная пространственно-двумерная модель транспорта наносов в прибрежной зоне водоемов, учитывающая следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня, ветровые течения, трение о дно. Построены и программно реализованы на кластере распределенных вычислений пространственно-трехмерная модель гидродинамики в прибрежной зоне водоемов, модель транспорта взвешенных частиц. Приведены результаты численных экспериментов.

## 1. Введение

Среди разнообразия природных явлений особое место по сложности, многообразию и практической значимости принадлежит процессам, протекающим в прибрежных водных системах. В условиях возрастания антропогенной нагрузки на прибрежно-шельфовые зоны реализация концепции устойчивого развития возможна с учетом всех факторов и процессов, определяющих состояние берегов. Динамика берегов и прибрежного рельефа дна во многом определяется характером перемещения наносов в береговой зоне под воздействием волн и течений. При конструктивном преобразовании рельефов необходимо учитывать динамику профиля дна в прибрежной зоне водоема под воздействием волновых процессов. Необходимы обоснованные методы расчета для достоверного прогноза динамических процессов береговой зоны.

Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование. Таким образом, проблема работы, а именно, прогнозирование формирования профиля дна в прибрежной зоне водоема при образовании наносов средствами численного моделирования, является актуальной.

## 2. Основные уравнения модели

Для описания динамики морских наносов в работе применяются уравнения, которые описывают переформирование прибрежной зоны водоемов, где вода и твердые частицы перемещаются в одном направлении. Исходные уравнения процесса перемещения наносов [1-5] с учетом ограничений на касательные напряжения на дне расчетной области могут быть записаны в следующем виде [3-5]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \bar{\tau}_b) = \operatorname{div}\left(k \left(\frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0}\right) \operatorname{grad} H\right) \quad (1)$$

$$k = \frac{A \sigma d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} h \left( \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right| - \tau_{bc} \right), \quad (2)$$

\* Работа выполнена при частичной поддержке проектов Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки "Фундаментальные проблемы математического моделирования".

где  $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  – функция Хэвисайда.

Уравнение (1) дополняется начальным условием:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y). \quad (3)$$

На границе расчетной области отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил:  $H'_0(x, y) = 0$ . (4)

В модели транспорта взвешенных частиц использована декартова система координат в горизонтальной плоскости и  $\sigma$  – координатная система в вертикальном направлении [6-8]:

$\sigma = \frac{z-\eta}{h+\eta}$ ,  $x_\sigma = x$ ,  $y_\sigma = y$ ,  $t_\sigma = t$ , здесь  $\sigma = a = 0$  на свободной поверхности,  $\sigma = b = -1$  на дне;

$H = h + \eta$  – общая глубина до свободной поверхности,  $h = h(x, y)$  – глубина водного объекта,  $\eta = \eta(t, x, y)$  – возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря). Для описания транспорта взвешенных частиц использовано уравнение диффузии-конвекции, которое может быть записано в следующем виде [9-11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{a-b}{H} (w - w_s) \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right] + F. \end{aligned} \quad (5)$$

Непрерывная модель гидродинамики жидкости водоема представлена [12-15]:

– уравнениями Навье-Стокса (Рейнольдса):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \\ = -\frac{P'_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \\ = -\frac{P'_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial w}{\partial \sigma} = \\ = -\frac{P'_\sigma}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right], \end{aligned}$$

– уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a-b}{H} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0.$$

Сеточные уравнения, полученные в результате неявных конечно-разностных аппроксимаций, решаются с помощью алгоритма адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода [18-22].

### 3. Дискретная модель транспорта взвешенных частиц

Расчетная область вписана в параллелепипед. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики вводится равномерная сетка:

$$\bar{w}_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, \sigma_k = kh_\sigma; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y}, k = \overline{0..N_\sigma};$$

$$N_t \tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_\sigma h_\sigma = 1\},$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $h_x, h_y, h_\sigma$  – шаги по пространству,  $N_t$  – количество временных слоев,  $T$  – верхняя граница по времени,  $N_x, N_y, N_\sigma$  – количество узлов по пространству,  $l_x, l_y$  – границы по пространству.

Через  $o_{i,j,k}$  обозначена «заполненность» ячейки  $(i, j, k)$ . Вводятся коэффициенты  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ , описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки.

На основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей  $q_m, m = \overline{0..6}$  можно аппроксимировать систему уравнений (5), при этом дискретный аналог уравнения для расчета транспорта взвеси примет вид:

$$\begin{aligned} & (q_0)_{i,j,k} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\tau} + (q_0)_{i,j,k} \frac{\tau^*}{2} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2} + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_x} + \\ & + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + \\ & + (q_3)_{i,j,k} v_{i,j+1/2,k} \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_y} + (q_4)_{i,j,k} v_{i,j-1/2,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{2h_y} + \\ & + (q_5)_{i,j,k} \frac{a-b}{H} (w_{i,j,k+1/2} - w_s) \frac{C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n}{2h_\sigma} + (q_6)_{i,j,k} \frac{a-b}{H} (w_{i,j,k-1/2} - w_s) \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k-1}^n}{2h_\sigma} = \\ & = (q_1)_{i,j,k} D_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} D_{i-1/2,j,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{h_x^2} + \\ & + (q_3)_{i,j,k} D_{i,j+1/2,k} \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} D_{i,j-1/2,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{h_y^2} + \\ & + (q_5)_{i,j,k} \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 D_{i,j,k+1/2} \frac{C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n}{h_\sigma^2} - (q_6)_{i,j,k} \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 D_{i,j,k-1/2} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k-1}^n}{h_\sigma^2} + F_{i,j,k}^n. \end{aligned}$$

Слагаемое  $(q_0)_{i,j,k} \frac{\tau^*}{2} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2}$  выступает в качестве регуляризатора [16]. Ранее задача решалась на основе схем расщепления на двумерную и одномерную задачу [5].

#### 4. Сравнение трудоемкостей явной и неявной схем для задачи диффузии-конвекции

Уравнение (5) описывает изменение концентрации частиц в условиях, учитывающих перенос вещества течениями, горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузией, а также физические характеристики частиц наносов.

В работе рассматривается трехмерная математическая модель транспорта взвеси. Для описания транспорта взвешенных частиц применяется уравнение диффузии-конвекции. Для решения задачи использовались как традиционные (неявные), так и явные дискретные модели, с добавлением в явные модели регуляризованного по Б.Н.Четверушкину слагаемого [16]. Неявная схема будет решать уравнение:

$$c'_t + uc'_x + vc'_y + wc'_z = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + (vc'_z)'_z + f. \quad (6)$$

Для явной схемы будет использоваться модифицированное уравнение, заключающееся во введении разностной производной по времени второго порядка с множителем  $\tau^*$ .

$$c'_t + \frac{\tau^*}{2} c''_t + uc'_x + vc'_y + wc'_z = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + (vc'_z)'_z + f \quad (7)$$

Время счета неявной схемы модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом (МПТМ) можно оценить как  $Q_{neivavn} : Q_{neivavn} = n_m n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}$ , где  $q_{PTM}$  – число итераций

МПТМ ( $q_{PTM} \approx 50$ );  $N$  – число узлов по пространству  $N = \max\{N_x, N_y\}$ ,  $N_x, N_y$  – число шагов по координатным осям;  $n(\varepsilon) = O(N)$ ;  $n_m = T / ht_n$ ,  $T$  – общее время счета,  $ht_n$  – шаг по времени для неявной схемы.

Для явной схемы такая оценка имеет вид:  $Q_{iavn} = n_{tr} N^2 q_{iavn}$ , где  $q_{iavn}$  – число итераций МПТМ ( $q_{iavn} \approx 14$ );  $N = \max\{N_x, N_y\}$ ,  $N_x, N_y$  – число шагов по координатным осям;  $n_{tr} = T / ht_r$ ,  $T$  – общее время счета,  $ht_r$  – шаг по времени для явной схемы с регуляризатором.

**Таблица 1.** Сравнение точности расчетов концентрации наносов неявными, явными и явными с регуляризатором схемами.

	$ht=0.01$	$ht=0.01296$	$ht=0.025$	$ht=0.036$	$ht=0.05$	$ht=0.075$	$ht=0.1$	$ht=0.2$
<b>Неявная схема <math>N_x \times N_y</math></b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.541		8.541	8.541	8.541	8.541	8.541	8.542
$z(C)$ , %			0.065	0.113	0.174	0.282	0.390	0.824
<b>Явная схема <math>N_x \times N_y</math> (с регуляризатором)</b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.539		8.536		8.531	8.525	8.52	8.497
$z(C)$ , %			0.232		0.625	1.027	1.436	3.16
<b>Явная схема <math>N_x \times N_y</math> (без регуляризатора, <math>\tau^* = 0</math>)</b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.539		8.536		8.531	8.526	8.521	8.501
$z(C)$ , %			0.229		0.611	0.993	1.375	2.906
<b>Неявная схема <math>2N_x \times 2N_y</math></b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.356		8.356	8.356	8.356	8.356	8.356	8.356
$z(C)$ , %			0.131	0.227	0.350	0.568	0.786	1.658
<b>Явная схема <math>2N_x \times 2N_y</math> (с регуляризатором)</b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.354		8.351	8.349	8.346	8.341	8.336	8.315
$z(C)$ , %			0.465	0.795	1.251	2.054	2.872	6.313
<b>Явная схема <math>2N_x \times 2N_y</math> (без регуляризатора, <math>\tau^* = 0</math>)</b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.354		8.351	8.349	8.347	8.342	8.337	8.319
$z(C)$ , %			0.458	0.795	1.223	1.987	2.752	5.816
<b>Неявная схема <math>4N_x \times 4N_y</math></b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.322		8.322		8.322	8.322	8.322	8.322
$z(C)$ , %			0.262		0.699	1.136	1.573	3.319
<b>Явная схема <math>4N_x \times 4N_y</math> (без регуляризатора, <math>\tau^* = 0</math>)</b>								
$\max(C)$ , г/л* $10^{-4}$	8.32	8.32	8.317		8.312	8.307	8.302	8.281
$z(C)$ , %		0.051	0.928		2.500	4.104	5.739	12.61

В таблице размер расчетной сетки  $kN_x \times kN_y \times N_z = 122 \times 102 \times 13$ , где  $k = 1, 2, 4$ ;  $z(C)$  – относительная погрешность,  $C_{0.01}$  – концентрация, посчитанная с шагом по времени 0.01:

$$z(c) = \frac{\max |C_{0.01} - C_{ht}|}{\max(C_{ht})} * 100\%$$

Из таблицы 1 видно, что увеличивая число ячеек расчетной области в 2 раза в целях сохранения относительной погрешности  $\approx 1\%$  для неявной схемы, решаемой модифицированным попеременно-треугольным методом, необходимо дробить шаг по времени в 2 раза, для явной схе-

мы в этом случае шаг по времени нужно уменьшать в  $1/\sqrt[2]{2^3} \approx 0.36$  раз [17]. По результатам численных экспериментов получаем следующую оценку, показывающую выигрыш во времени для явной схемы по отношению к неявной, в случае размеров сетки с  $122*102*13$  (число итераций 8):

$$\frac{Q_{neiyavn}}{Q_{iyavn}} = \frac{n_t n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}}{n_{t_r} N^2 q_{iyavn}} = \frac{0.072 * 8 * 122^2 * 50}{0.2 * 122^2 * 14} \approx 10.286,$$

а в случае размеров сетки  $244*204*13$  (число итераций 10):

$$\frac{Q_{neiyavn}}{Q_{iyavn}} = \frac{n_t n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}}{n_{t_r} N^2 q_{iyavn}} = \frac{0.036 * 10 * 244^2 * 50}{0.1 * 244^2 * 14} \approx 12.857,$$

в случае размеров сетки  $488*404*13$  (число итераций 12):

$$\frac{Q_{neiyavn}}{Q_{iyavn}} = \frac{n_t n(\varepsilon) N^2 q_{PTM}}{n_{t_r} N^2 q_{iyavn}} = \frac{0.025 * 12 * 488^2 * 50}{0.075 * 488^2 * 14} \approx 14.286.$$

На основе проведенного численного решения модельной задачи можно сделать вывод, что при решении задачи с увеличением размеров расчетной сетки, выигрыш по времени счета явной схемы только увеличивается. Таким образом, явные модифицированные схемы имеют преимущества по реальным временным затратам (10-14 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее неявными и нерегуляризованными явными схемами. Добавление в явную схему слагаемого с регуляризатором – второй разностной производной по времени с множителем  $\tau^*$ , который есть величина порядка  $\square h_t^2$ , превращает ее в трехслойную разностную схему, для устойчивости которой достаточно выполнения условия:  $ht = O(1/N^{3/2})$ . Что является менее жестким по сравнению с ограничением на временной шаг для явной нерегуляризованной схемы  $ht = O(1/N^2)$  [16].

## 5. Метод решения сеточных уравнений

Сеточные уравнения, полученные в результате конечно-разностных аппроксимаций, можно записать в матричном виде [18]. Для нахождения решения задачи будем использовать неявный итерационный процесс [19]:

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f. \quad (8)$$

В уравнении (8)  $m$  – номер итерации,  $\tau > 0$  – итерационный параметр, а  $B$  – некоторый обратимый оператор, который называется предобуславливателем или стабилизатором. Обращение оператора  $B$  в (8) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора  $A$ . При построении  $B$  исходили из аддитивного представления оператора  $A_0$  – симметричной части оператора  $A$ :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \quad (9)$$

где  $A = A_0 + A_1$ ,  $A_0 = A_0^*$ ,  $A_1 = -A_1^*$ .

Оператор-предобуславливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad (10)$$

где  $D$  – некоторый оператор.

Соотношения (8)-(10) задают модифицированный попеременно-треугольный метод решения задачи, если определены операторы  $R_1, R_2$  и указаны способы определения параметров  $\tau_{m+1}$ ,  $\omega$  и оператора  $D$ .

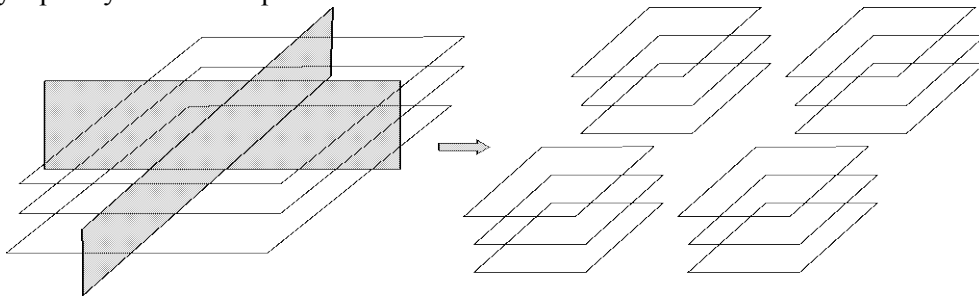
Оценка скорости сходимости разработанного алгоритма адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором [20-22] имеет вид:

$$\rho \leq \frac{v^* - 1}{v^* + 1}, \quad v^* = v(\sqrt{1+k} + \sqrt{k})^2, \quad k = \frac{(B^{-1}A_1\omega^m, A_1\omega^m)}{(B^{-1}A_0\omega^m, A_0\omega^m)},$$

где  $v$  – число обусловленности оператора  $C_0$ ,  $C_0 = B^{-1/2}A_0B^{-1/2}$ .

## 6. Параллельный вариант метода решения сеточных уравнений

Идея параллельного алгоритма метода решения сеточных уравнений заключается в следующем [23]. После разбиения исходной расчетной области на части по двум координатным направлениям каждый процессор получает свою расчетную область, как показано на **Рис. 1**, при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения.



**Рис. 1.** Декомпозиция области.

После того как каждый процессор получит информацию для своей части области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальный по модулю элемент вектора невязки и передает его значение всем оставшимся вычислителям. Теперь для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальный элемент.

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

$$(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)w^m = r^m,$$

где  $R_1$  – нижне-треугольная матрица, а  $R_2$  – верхне-треугольная матрица. Для вычисления вектора поправки нужно последовательно решить два уравнения:

$$(D + \omega_m R_1)y^m = r^m, \quad (D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m.$$

Вначале вычисляется вектор  $y^m$ , при этом расчет начинается в левом нижнем углу. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки  $w^m$ . Схема расчета вектора  $y^m$  изображена на **Рис. 2** (Показана передача элементов после расчета двух слоев первым процессором).

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи – первый. Передача элементов после расчета двух слоев первым процессором показана на **Рис. 2**. В схеме для расчета вектора  $y^m$  только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций, для узлов сетки, располагающихся в предшествующих позициях данной строки. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои. Аналогичным образом можно решить СЛАУ с верхне-треугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения [22] и выполняется переход на следующий итерационный слой.

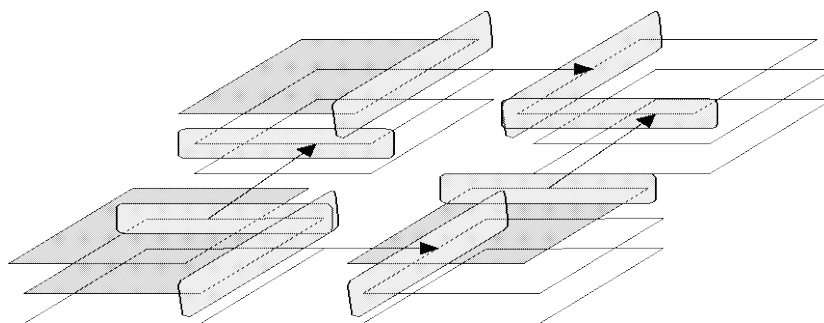


Рис 2. Схема для расчета вектора  $y^m$ .

Алгоритм адаптивного попеременно-треугольного метода реализован многопроцессорной вычислительной системой (МВС) РОЦ НИТ ЮФУ. Пиковая производительность МВС составляет 18.8 TFlops. МВС включает в себя 8 компьютерных стоек. Вычислительное поле МВС построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3GHz и оперативной памятью в объеме 32ГБ. Общее количество вычислительных ядер в комплексе – 2048, суммарный объем оперативной памяти – 4 ТВ.

Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в таблице 2.

Таблица 2. Зависимость ускорения и эффективности от количества процессоров

Количество процессоров	Время, с	Ускорение	Эффективность
1	7,490639	1	1
2	4,151767	1,804	0,902
4	2,549591	2,938	0,734
8	1,450203	5,165	0,646
16	0,882420	8,489	0,531
32	0,458085	16,351	0,511
64	0,265781	28,192	0,44
128	0,171535	43,668	0,341

## 7. Численные эксперименты по осаждению взвеси и переформированию дна с использованием трехмерной модели гидродинамики

На основе разработанного комплекса для МВС был выполнен расчет ущерба рыбному хозяйству за период ремонтного черпания Подходного судоходного канала к причалам Архангельского терминала. Производилось моделирование распространения взвешенных частиц при выгрузке трюма самоотвозного землесоса в отвал. Исходными данными являются: глубина водоема 10 м; объем загрузки 741 м<sup>3</sup>; скорость течения 0,2 м/с; скорость осаждения 2,042 мм/с; плотность грунта 1600 кг/м<sup>3</sup>; процентное содержание пылеватых частиц ( $d$  меньше 0,05 мм) в песчаных грунтах – 26,83%. Параметры расчетной области: длина 3 км; ширина 1,4 км; шаг по горизонтальной пространственной координате 20м; шаг по вертикальной пространственной координате 1 м; расчетный интервал 2 часа.

На Рис 3 – 6 приведена динамика изменения концентрации взвешенных частиц с течением времени. Палитрой показано значение концентрации взвешенных частиц. Расчетный интервал составлял: 15 мин; 30 мин; 1 ч; 2 ч соответственно. Направление течения вдоль оси ОХ.

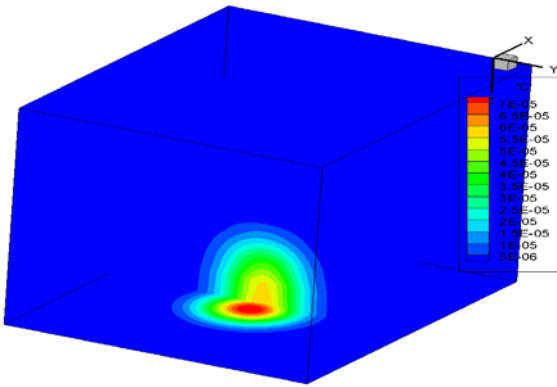


Рис 3. Концентрация взвешенных частиц через 15 мин.

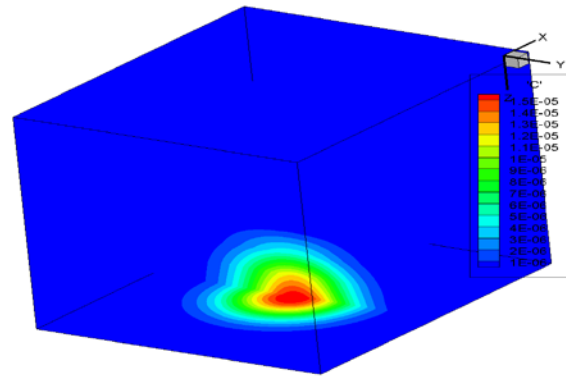


Рис 4. Концентрация взвешенных частиц через 30 мин.

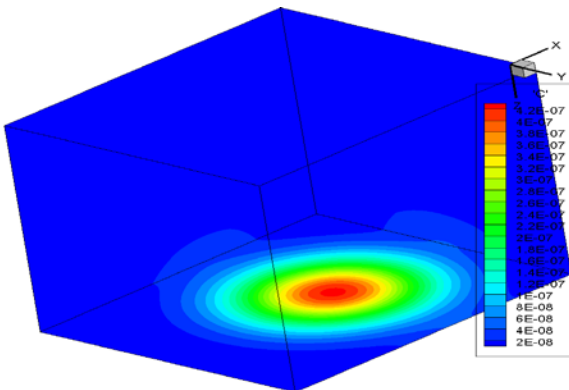


Рис 5. Концентрация взвешенных частиц через 1 час.

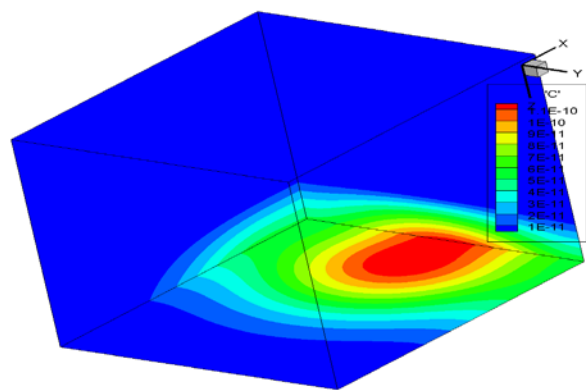


Рис 6. Концентрация взвешенных частиц через 2 часа.

В инженерных расчетах площадь заилиения вычисляется по эмпирической формуле [24]:

$$F = \frac{B_1 + B_2}{2L}, \quad B_2 = B_1 + 2tg13^\circ L. \quad (11)$$

На Рис 7 приведены зависимости ширины зоны смешения, м (влияние диффузионного перемешивания на картины распределения взвешенных частиц) от расстояния до створа, м (влияние конвективного переноса), рассчитанные на основе разработанного программного комплекса (на рисунке показаны кружками) и на основе формулы (11) (показаны сплошной линией).

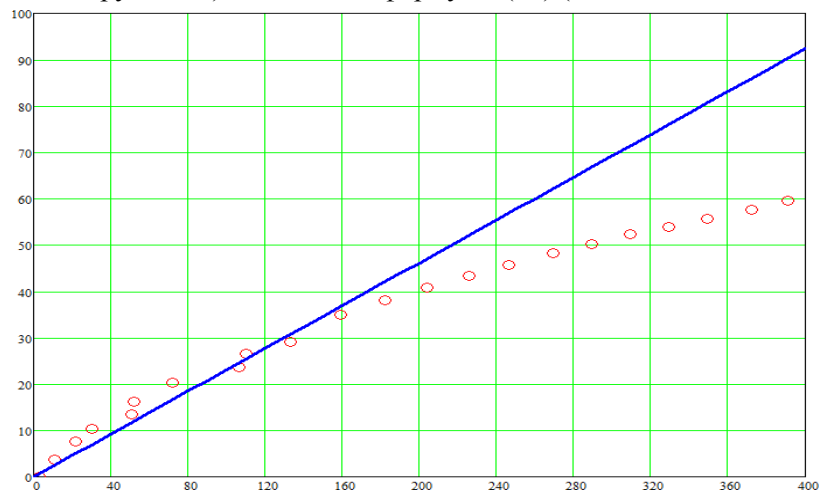
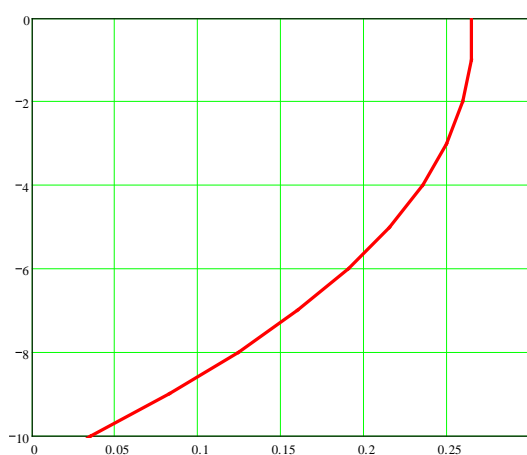


Рис 7. Зависимости ширины зоны смешения от расстояния до створа.

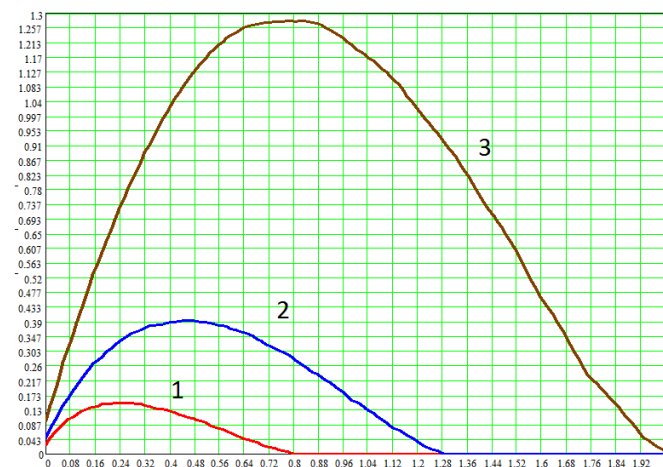
Из результатов численных экспериментов видно, что в случае расстояния до створа 150 м и менее можно принять гипотезу о том, что интенсивность диффузионного перемешивания зави-



сит линейно от интенсивности конвективного переноса и составляет  $\sim 23,1\%$  ( $\text{tg}13^\circ$ ). При больших расстояниях преобладание конвективного переноса над диффузионными процессами усиливается.



**Рис. 8.** Профиль вектора скорости движения водной среды.



**Рис. 9.** Зависимости от времени объемов воды (млн.  $\text{м}^3$ ) с содержанием взвешенных частиц: 1 – более 100 мг/л, 2 – более 20 мг/л, 3 – более 0,75 мг/л.

На **Рис. 8** приведен результат расчета профиля горизонтальной составляющей вектора скорости движения водной среды. На **Рис. 9** приведены зависимости от времени (час) объемов воды (млн.  $\text{м}^3$ ) с содержанием взвешенных частиц (1 – более 100 мг/л, 2 – более 20 мг/л, 3 – более 0,75 мг/л). Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории, а также уровень загрязнения вод.

## 8. Заключение

Построена двумерная математическая модель транспорта наносов в мелководных водоемах, удовлетворяющая основным законам сохранения. Модель учитывает две пространственные переменные и следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня, ветровые течения и трение о дно. Описаны программные комплексы и результаты их применения, использующие модели транспорта наносов в прибрежных водных системах, для расчета скорости движения водной среды использованы двумерная и трехмерная модели гидродинамики.

Проведен анализ численного решения модельной задачи, показавший что с увеличением размеров расчетной сетки, временные затраты для явной схемы существенно уменьшаются. Модификация явной схемы – введение разностной производной второго порядка с множителем-регуляризатором – позволяет существенно ослабить ограничения на допустимую величину шага по времени. Также, явные регуляризованные схемы показали преимущество по реальным временным затратам (10-15 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее традиционными неявными и нерегуляризованными явными схемами.

Рассмотренные модели и разработанный проблемно-ориентированный комплекс программ для МВС применимы для количественного прогноза процессов переформирования рельефа дна, береговой линии, переноса загрязнений и экологических изменений в прибрежных акваториях и могут быть полезны при строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений, создании проектов защиты берегов, обеспечении экологической безопасности и рекреационного режима пляжей.

## Литература

1. Леонтьев И.О. Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: Геос., 2001. 272с.
2. Проценко Е.А. Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2009. Т. 97. № 8. С. 71-75.
3. Проценко Е.А. Двумерная конечно-разностная модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема и ее программная реализация// Инженерный вестник Дона. 2010. Т. 13. № 3. С. 23-31.
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов//Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 12. С. 65-82.
5. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе// Вычислительные методы и программирование. -2014. -Т. 15.-С. 610-620.
6. Ezer T., Mellor G.L. Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model. Dynamics of Atmospheres and Oceans. -2000. -Vol. 32. С. 155-208.
7. Дегтярева Е.Е., Проценко Е.А., Чистяков А.Е. Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях// Инженерный вестник Дона. 2012. Т. 23. № 4-2. С. 30.
8. Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е. Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море// Известия ЮФУ. Технические науки. –2012. №2 (127). С 112-118.
9. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе//Вычислительные методы и программирование. -2013. -Т. 14. С. 103-112.
10. Сухинов А.И., Никитина А.В. Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море//Известия ЮФУ. Технические науки. -2011. -№ 8 (121). С. 62-73.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2013. № 4. С. 87-98.
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе// Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 3. – С.3-21.
13. Васильев В.С., Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов//Математическое моделирование, 2003, Т.15, №10. С. 17-34.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишня А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов//Математическое моделирование. -2012. -Т.24, №8, С. 32-44.
15. Чистяков А.Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды// Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010, №6(107). С 66-77.
16. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред// Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 11. С. 33-52.
17. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишня А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами// Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 11. С. 53-64.

18. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука, 1989.
19. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. Наука, 1978.
20. Коновалов А.Н. Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобусловливателем// Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 953.
21. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода// Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43. № 3. С. 552.
22. Сухинов А. И., Чистяков А. Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором//Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 1. С. 3-20.
23. Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска// Известия ЮФУ. Технические науки.– . 2010, №6(107). С 237-249.
24. Типовая технологическая схема добычи песка, гравия и песчано-гравийной смеси судоходных рек и других водоемов. М.: Транспорт, 1980.