

# О реализации и тестировании неявной схемы решения трехмерных уравнений Навье-Стокса на неструктурированной сетке для архитектуры с несколькими графическими ускорителями

Н.М. Евстигнеев, О.И. Рябков

Институт системного анализа Российской Академии наук

В работе рассматривается реализация численного полностью неявного по времени метода решения системы уравнений Навье-Стокса на неструктурированной гетерогенной сетке для multigpu архитектуры. В схеме используется метод сборки матрицы линеаризации системы с применением аналитических выражений для линеаризованных вязких и невязких потоков на гранях. Тестирование метода проводилось в основном на двух примерах: квазиодномерная задача Сода (невязкая часть схемы, тестировалась на различных сетках, включая сетку из тетраэдров) и закрученное течение в канале цилиндрической формы. Помимо этого рассматривалась модельная задача обтекания цилиндра на сверхзвуковой скорости, для которой применялась неявная по вязким членам схема. Проведено сопоставление схем первого и второго порядков.

## 1. Введение

Необходимость применения неявных методов для уравнений математической физики вполне очевидна. Жесткие условия ограничения шага по времени для явных схем (особенно т.н. акустическое и диффузионное ограничения) приводят к невозможности проводить расчет за обозримое время. Построение неявной схемы на архитектуре графических процессоров сопряжено с рядом трудностей, связанных с архитектурными особенностями GPU и трудностью распараллеливания эффективных итерационных (в основном Крыловских) методов решения СЛАУ на SPMT (single process multiple thread) архитектуры. Предполагается воспользоваться результатами предыдущих работ авторов [6], [9] и обобщить их на неструктурированную сетку, с целью ускорить численное решение н.к.з. на GPU.

## 2. Рассматриваемые уравнения, начально-краевая задача

Будем рассматривать однородные уравнения гиперболического и параболического типов на ограниченной области  $\Omega \times [0..T]$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_3} = \mathbf{0}; \quad (1)$$

где векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  определяют уравнение. Будем рассматривать два уравнения - первое, модельное уравнение переноса, второе, основное для данной работы, уравнение динамики вязкого сжимаемого газа. Скалярное уравнение переноса:

$$\mathbf{U} = [S]^T; \mathbf{F}_1 = [a_1 S]^T; \mathbf{F}_2 = [a_2 S]^T; \mathbf{F}_3 = [a_3 S]^T; \quad (2)$$

где:  $S$  - скалярная функция;  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  - скорость переноса скалярной функции. Система уравнений Навье-Стокса (без источниковых членов):

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \left[ \rho; \rho v_1; \rho v_2; \rho v_3; \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right]^T; \\
\mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_{c1} + \mathbf{F}_{d1} = \\
&\left[ \rho v_1; \rho v_1 v_1 + P - \sigma_{11}; \rho v_2 v_1 - \sigma_{21}; \rho v_3 v_1 - \sigma_{31}; (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + P)u - \sum_{j=1}^3 \sigma_{1j} v_j - \chi \frac{\partial T}{\partial x_1} \right]^T; \\
\mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_{c2} + \mathbf{F}_{d2} = \\
&\left[ \rho v_2; \rho v_1 v_2 - \sigma_{12}; \rho v_2 v_2 + P - \sigma_{22}; \rho v_3 v_2 - \sigma_{32}; (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + P)v - \sum_{j=1}^3 \sigma_{2j} v_j - \chi \frac{\partial T}{\partial x_2} \right]^T; \\
\mathbf{F}_3 &= \mathbf{F}_{c3} + \mathbf{F}_{d3} = \\
&\left[ \rho v_3; \rho v_1 v_3 - \sigma_{13}; \rho v_2 v_3 - \sigma_{23}; \rho v_3 v_3 + P - \sigma_{33}; (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + P)w - \sum_{j=1}^3 \sigma_{3j} v_j - \chi \frac{\partial T}{\partial x_3} \right]^T; \\
\sigma_{ij} &= \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k}; \\
P &= \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1}; P = \frac{\rho R T}{\mathcal{M}}
\end{aligned} \tag{3}$$

где:  $\rho$  - плотность;  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$  - вектор-функция скорости жидкости;  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия;  $\sigma_{ij}$  - тензор вязких напряжений;  $P$  - давление;  $T$  - температура;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $\mathcal{M}$  - молярная масса;  $\gamma$  - показатель адиабаты;  $\eta$  - первая вязкость;  $\zeta$  - вторая вязкость;  $\chi$  - коэффициент теплопроводности.  $\mathbf{F}_{c_j}$  соответствуют конвективным членам,  $\mathbf{F}_{d_j}$  - диффузионным (вязкость и теплопроводность). Для кратности через  $v^2$  обозначен квадрат модуля скорости. Также мы допускали возможность зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры:  $\eta = \eta(T)$ ,  $\chi = \chi(T)$ . Вторая вязкость во всех расчетах бралась равной нулю. В качестве уравнения состояния мы используем уравнение состояния идеального газа.

Уравнение (2) является гиперболическим. Система (3) может быть как параболической (собственно уравнения Навье-Стокса), так и гиперболической (в случае, когда  $\eta = 0$  и  $\chi = 0$ , система переходит в систему уравнений Эйлера).

Помимо самой системы уравнений Навье-Стокса нам понадобятся якобианы гиперболических потоков:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\partial F_{c1}}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1^2 + \theta b & 2v_1 - v_1 b & -v_2 b & -v_3 b & b \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0 & 0 \\ -v_1 v_3 & v_3 & 0 & v_1 & 0 \\ -v_1 h + v_1 \theta b & h - v_1^2 b & -v_1 v_2 b & -v_1 v_3 b & v_1 + v_1 b \end{bmatrix}; \\
h &= \varepsilon + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho}; \theta = v^2 - (\varepsilon + \frac{1}{2} v^2) + \frac{\rho P_\rho}{P_\varepsilon}; \\
b &= \frac{P_\varepsilon}{\rho}; P_\varepsilon = \left( \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right)_\rho; P_\rho = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_\varepsilon
\end{aligned} \tag{4}$$

Якобианы  $A_2$  и  $A_3$  выписываются аналогично.

### 3. Явная по времени схема аппроксимации

Описываемый в данной статье численный метод ориентирован на решение практических задач с достаточно сложной геометрией, поэтому нами используется неструктурированная гетерогенная сетка, где один элемент обозначается как  $\mathcal{T}$ . Среди поддерживаемых на данный момент типов элементов имеются тетраэдры, треугольные призмы, четырехугольные пирамиды и гексаэдры. Пусть всего таких элементов  $M$  и  $\Omega = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{T}_i$ ,  $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j = \emptyset, i \neq j$ . Под соседями '0' порядка будем понимать элементы, имеющие общую грань (сторону). Тогда, для любого элемента  $\mathcal{T}_i$  существует не пустое множество соседей '0' порядка. Обозначим множество индексов этих элементов через  $\mathcal{N}_i^0 = \{n_{i1}^0, n_{i2}^0, \dots\}$ . Запишем дискретную по пространству консервативную аппроксимацию для элемента  $\mathcal{T}_i$  уравнения (1):

$$\frac{d\bar{U}_i}{dt} = -\frac{1}{W_i} \sum_{j=1}^{|\mathcal{N}_i^0|} (\mathcal{L}_c(U_{ij}^L, U_{ij}^R, \mathbf{n}_{ij}) + \mathcal{L}_d(U_{ij}^L, U_{ij}^R, (\nabla_h U)_{ij}^F, \mathbf{n}_{ij})), \quad (5)$$

где:  $W_i$  - объем элемента  $i$ ,  $\bar{U}_i$  - среднее значение вектора по элементу, запись  $U_{ij}^{L/R}$  означает значение вектора  $U$  на левой/правой стороне относительно грани соединяющей элемент  $i$  с его  $j$ -м соседом,  $(\nabla_h U)_{ij}^F$  - аппроксимация градиента на грани,  $\mathbf{n}_{ij} = \{n_x, n_y, n_z\}$  - внешняя нормаль стороны элемента  $i$ , оператор  $\mathcal{L}_c(U_1, U_2, n)$  есть оператор, аппроксимирующий конвективный поток  $F_c$  консервативных переменных  $U$  через  $j$ -ю грань элемента  $i$  по значениям слева и справа от грани. Аналогично  $\mathcal{L}_d(U_1, U_2, g, n)$  - оператор, аппроксимирующий  $F_d$ . На операторы, аппроксимирующие потоки, накладываются следующие условия:

**Консервативность.** Поток должен полностью обнуляться при суммировании по соседям первого порядка, поэтому предполагается, что  $\mathcal{L}_c(U_1, U_2, n) = -\mathcal{L}_c(U_2, U_1, -n)$  и  $\mathcal{L}_d(U_1, U_2, g, n) = -\mathcal{L}_d(U_2, U_1, g, -n)$ .

**Согласованность.** Численный поток при одинаковых аргументах полностью переходит в физический поток, т.е.  $\mathcal{L}_c(U_1, U_1, n) = F_{c1}(U_1)n_x + F_{c2}(U_1)n_y + F_{c3}(U_1)n_z$  и  $\mathcal{L}_d(U_1, U_1, g, n) = F_{d1}(U_1, g)n_x + F_{d2}(U_1, g)n_y + F_{d3}(U_1, g)n_z$ .

Например, поток уравнения скалярного переноса (2):

$$\mathcal{L}(S_1, S_2, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2}(S_1 - S_2)|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})| \quad (6)$$

где  $\cdot$  обозначает скалярное произведение векторов.

Способ вычисления значений  $U_{ij}^{L/R}$  определяется используемым методом реконструкции. Для методов первого порядка достаточно положить  $U_{ij}^L = \bar{U}_i$ ,  $U_{ij}^R = \bar{U}_{n_{ij}^0}$ .

Для увеличения порядка пространственной аппроксимации используются различные методы. В наших расчетах мы применяли метод, основанный на вычислении градиентов консервативных переменных  $U$  в ячейке  $i$  на основании значений переменных в самой ячейке и ее соседях '0' порядка. Для получения нелимитированного градиента мы использовали метод наименьших квадратов. Если обозначить через  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  компоненты искомого градиента для  $k$ -ой компоненты  $U$ , то реконструкция внутри элемента  $i$  будет иметь вид:

$$(U_i^{rec})_k(x) = (\bar{U}_i)_k + (x_1 - x_{i1}^c)\alpha_1 + (x_2 - x_{i2}^c)\alpha_2 + (x_3 - x_{i3}^c)\alpha_3 \quad (7)$$

Здесь через  $(U)_k$  мы обозначаем  $k$ -ую компоненту вектора  $U$ ,  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $x_i^c = \{x_{i1}^c, x_{i2}^c, x_{i3}^c\}$  обозначает координаты барицентра элемента  $i$ . Тогда коэффициенты

реконструкции ищутся как решение задачи минимизации:

$$\alpha = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{j=1}^{|\mathcal{N}_i^0|} ((\bar{U}_i)_k - (\bar{U}_{n_{ij}})_k) + \right. \\ \left. + (x_{n_{ij},1}^c - x_{i1}^c)\alpha_1 + (x_{n_{ij},2}^c - x_{i2}^c)\alpha_2 + (x_{n_{ij},3}^c - x_{i3}^c)\alpha_3 \right)^2 \quad (8)$$

После вычисления нелимитированных градиентов  $\alpha$  к ним применяется процедура лимитирования. Используемые нами процедуры лимитирования уменьшают значение наклона реконструкции вдоль векторов, соединяющих барицентр  $i$ -ого элемента с барицентрами его граней, таким образом, чтобы при вычислении реконструируемых значений по формуле (7) с использованием лимитированных градиентов  $\tilde{\alpha}$  на гранях элементов выполнялись условия TVD. Нами использовались два типа условий, которые в одномерном случае переходят в условия MinMod и SuperBEE.

Процедура вычисления градиентов переменных  $(\nabla_h U)_{ij}^F$  на гранях ячеек, необходимых для вычисления вязких потоков, тесно связана с описанной выше процедурой вычисления градиентов в центрах ячеек. В действительности, тангенсальная часть градиента на грани бралась равной взвешенной сумме градиентов в соседних ячейках. Нормальная компонента вычислялась непосредственно по значениям переменных в этих ячейках. Отдельная процедура для вычисления нормальной компоненты необходима для того, чтобы устранить четно-нечетное расщепление на гексагональных сетках (например, в области погранслоя).

Интегрирование по времени проводилось обычным методом Эйлера первого порядка или явным TVD методом второго порядка.

## 4. Неявная по времени схема аппроксимации

Наш подход к построению неявной схемы основан на применении метода «черного ящика». Если мы обозначим через  $\bar{U} = (\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_M)$  общий вектор, состоящий из векторов консервативных переменных (для уравнения переноса (2) это будет вектор размера  $M$ , для уравнений Навье-Стокса (3) - матрица размера  $M \times 5$ ), то неявная по времени дискретизация полудискретного уравнения (5) будет иметь вид:

$$\frac{\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n}{\delta t} = f(\bar{U}^{n+1}) \quad (9)$$

Где  $\bar{U}^n$  - сеточное значение вектора  $\bar{U}$  в момент времени  $t_n$ ,  $\delta t$  - шаг по времени,  $f(\bar{U})$  включает в себя всю правую часть уравнения (5). Альтернативой данному подходу является подход с применением расщепления по переменным (он существенно зависит от конкретной системы уравнений). Для вычислительной газовой динамики к данному классу можно отнести методы compressible PISO и compressible SIMPLE [2]. Среди преимуществ последних методов можно назвать необходимость решения систем линейных уравнений меньшей размерности (несколько систем размера  $M$  вместо одной системы размера  $5M$ ). С другой стороны, данные методы имеют меньшую область применимости, в особенности при больших значениях числа Маха.

В описываемом в данной статье подходе мы решаем нелинейное уравнение (9) методом Ньютона с применением техники глобализации. При выполнении одной итерации метода нам необходимо разрешить линейную систему уравнений, матрица которой является якобианом уравнения (9). В статьях посвященных методам с полностью неявной схемой иногда указывается на возможность применения так называемого «matrix-free» метода, см., например, [5]. При этом вычисление значений

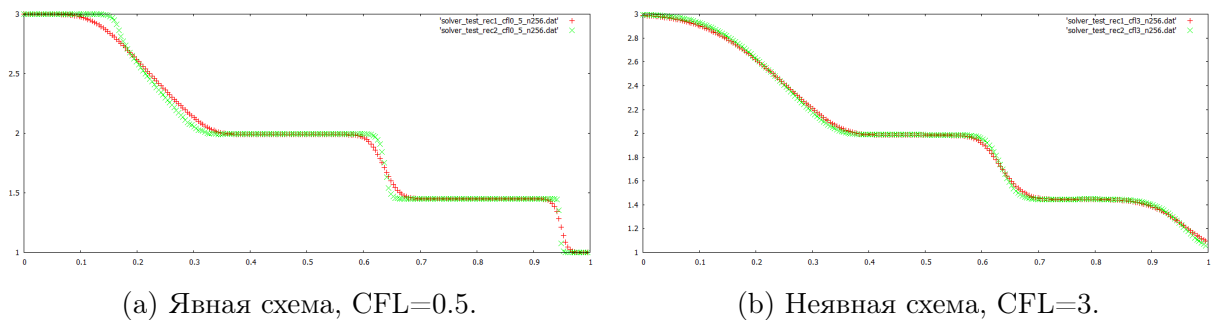
производных нелинейного уравнения вдоль направлений можно проводить, например, методом «automatic differentiation». При попытках реализации данного метода мы выявили несколько его недостатков. К сожалению, в данном подходе нет возможности эффективно вычислить диагональ матрицы, т.е. нет возможности использовать диагональный предобуславливатель. Решение систем без диагонального предобуславливания приводит к крайне низкой скорости сходимости итерационного метода или к его расходимости. Способы вычисления диагонали с применением техники AD требуют дополнительные расчеты производных вдоль нескольких опорных векторов, что существенно понижает эффективность метода. К тому же сама процедура вычисления производной требует двукратного увеличения количества переменных, что при реализации на CUDA ведет к двукратному увеличению количества регистровых переменных и, соответственно, негативно сказывается на производительности. Поэтому в описываемом в данной статье методе мы перешли к процедуре, при которой якобиан вычисляется на основе аналитических выражений. В действительности, наш подход является компромиссом между «matrix-free» подходом и полным вычислением матрицы якобиана, поскольку мы представляем якобиан в виде суммы произведений некоторых матриц, причем некоторые из них не записываются явно в память. Подобный подход позволяет значительно сократить необходимый объем памяти и количество операций, выполняемых при вычислении произведения якобиана на вектор переменных. Для решения линейной системы используются методы BiCGStab или CGS с геометрическим многосеточным предобуславливателем.

## 5. Задача Сода о распаде разрыва

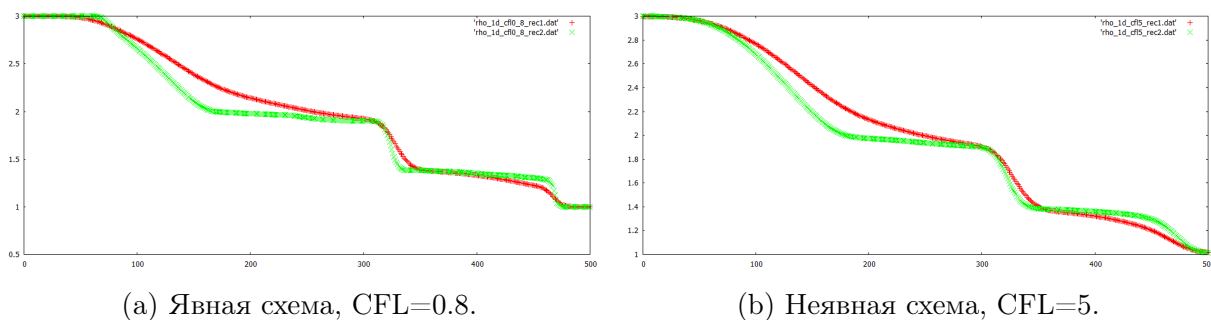
Задача Сода о распаде одномерного разрыва является классическим тестом для проверки работоспособности и качества схемы. Различные варианты этого теста могут быть найдены, например, в [1]. В данном тесте рассматривается невязкий газ (уравнения Эйлера), а решение характеризуется наличием сверхзвуковых областей и сильных разрывов.

Мы проводили тестирование в трех основных вариантах. В первом из них задача решалась на одномерной сетке (отдельная от основного кода тестовая реализация). Во втором - на трехмерной гексаэдральной сетке в прямоугольной области, при этом по оси  $x$  постановка задачи совпадала с первым вариантом, а переменные в начальных условиях не зависели от координат  $y$  и  $z$  (квазиодномерный тест). В третьем варианте теста мы использовали в качестве области решения цилиндр. Как и во втором варианте все переменные в начальных условиях зависели только от одной координаты, однако в данном случае использовалась сетка из тетраэдров, никаким образом не выровненная с основным направлением. Таким образом, последний тест также является тестом на квазиодномерность, но существенно трехмерная сетка делает его более реалистичным.

Первый и второй варианты теста показали (как это и должно быть) одинаковый результат. Характерное распределение плотности для сетки с  $M=256$  элементами (вдоль главного направления) показано на рисунках 1a и 1b. На рис. 1a показан результат для явной схемы с числом Куранта CFL=0.5, на рис. 1b - для неявной с CFL=3. Красный цвет на графике относится к схеме первого порядка, зеленый - к схеме второго порядка. Можно видеть, что неявная схема достаточно адекватно воспроизводит результат, при этом второй порядок в неявной схеме (даже на достаточно большой сетке и небольшом CFL) не дает существенного улучшения.



**Рис. 1.** Тест Сода на сетке из гексаэдров, распределение плотности вдоль главного направления.



**Рис. 2.** Тест Сода на сетке из тетраэдров, распределение плотности вдоль главного направления.

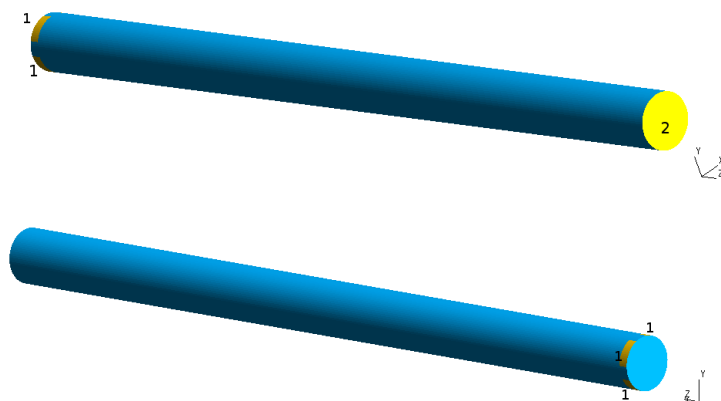
На рисунках 2а и 2б в полностью аналогичной форме приведены результаты для третьего варианта теста (на сетке из тетраэдров, графики соответствуют центральной линии). Сетка в данном случае имела размер  $M=200000$  элементов, характерный размер сетки вдоль основного направления составлял примерно 100 элементов. Мы можем видеть, что в данном случае второй порядок в неявной схеме (несмотря на больший относительный шаг по времени,  $CFL = 5$ ) дает значительное улучшение качества решения. Такое различие между результатами второго и третьего вариантов теста мы объясняем следующим образом. Для гексаэдральной сетки основной вклад в ошибку решения в случае неявной схемы должно быть вносит способ аппроксимации по времени (неявная схема Эйлера первого порядка). В то время как в случае с сеткой из тетраэдров значительная часть ошибки - это ошибка пространственной аппроксимации (что косвенно подтверждается «смазанным» видом решения для явной схемы первого порядка). Должно быть, этим и объясняется улучшение качества решения неявной схемы при использовании второго порядка по пространству.

## 6. Задача о закрученном потоке в трубе с открытым концом

Данная задача рассматривается в связи с тем, что авторы ранее проводили численное моделирование с применением явной схемы, а также в связи с тем, что имеются экспериментальные данные PIV (цифровая трассерная визуализация) измерений, выполненных в ОИВТ РАН, что позволяет сопоставить результаты расчета с экспе-

риментальными данными, см. [11].

Геометрия расчетной области показана на рис. 3. Расчетная область представляет



**Рис. 3.** Геометрия и граничные условия для задачи течения закрученного потока в цилиндрической трубе. 1 - входные, а 2 - выходные граничные условия. Диаметр - 0.054м, длина - 0.78м.

из себя цилиндр, с постоянным диаметром 0.054м и длиной 0.78м. Газ - воздух, массовый расход газа составляет 0.008кг/с при нормальных условиях, т.е. атмосферном давлении (101325Па) и комнатной температуре (293.5К). Исходные данные взяты из экспериментальной установки [11].

Начальные условия: в начальный момент газ с комнатной температурой покоится ( $\mathbf{V} = 0\text{м/с}$ ,  $T = 293.5\text{К}$ ) во всем объеме.

Граничные условия разделяются на входные в области 1, выходные в области 2 и стенку для всей оставшейся области. Для области 1 ставятся условия Дирихле для скорости газа, температуры и условия Неймана для плотности. В области 1 около торца кварцевой трубы расположено 4 прямоугольных отверстия, через которые тангенциально подается газ. Входные скорости  $\mathbf{V}_{in}$  имеют составляющие  $\mathbf{n} = \{0.1; 0.99 \cdot a; 0.99 \cdot b\}$ ,  $\mathbf{V}_{in} = \mathbf{n} \cdot M$ , где  $a$  и  $b$  выбираются из условий нахождения отверстий относительно орт глобальной системы координат, а  $M$  определяется из условия подачи массового расхода на вход в камеру, равного  $M = 0.008\text{кг/с}$ . Входная температура считается равной комнатной температуре  $T = 293.5\text{К}$ . Теплопроводность через стенки трубы считается незначительной (область твердых стенок термоизолирована), стенка гидравлически гладкая, на всей стенке ставится условие прилипания  $\mathbf{v} = 0$ . На выходе из трубы, в области 2, ставятся граничные условия свободного истечения, и в центре сечения в точке при  $r \sim 0$  давление доопределяется значением  $P_0 = P_{atm}$ .

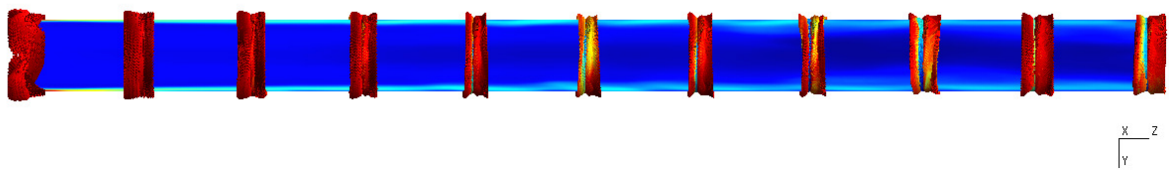
Максимальное число Маха составляет порядка 0.2, т.е. рассматривается сильно дозвуковой режим. Применение явной схемы в таком режиме течения значительно снижает эффективность метода и замедляет расчет. Кроме того, выигрыш времени по полу-неявной схеме (неявная только диффузия) также будет незначительным, а в некоторых случаях и проигрышным относительно явной схемы. Поэтому данная задача достаточно показательно демонстрирует эффективность полностью неявной схемы.

Степень интенсивности закрутки можно определить как отношение углового мо-

мента к осевому по всему сечению трубы во входном торце:

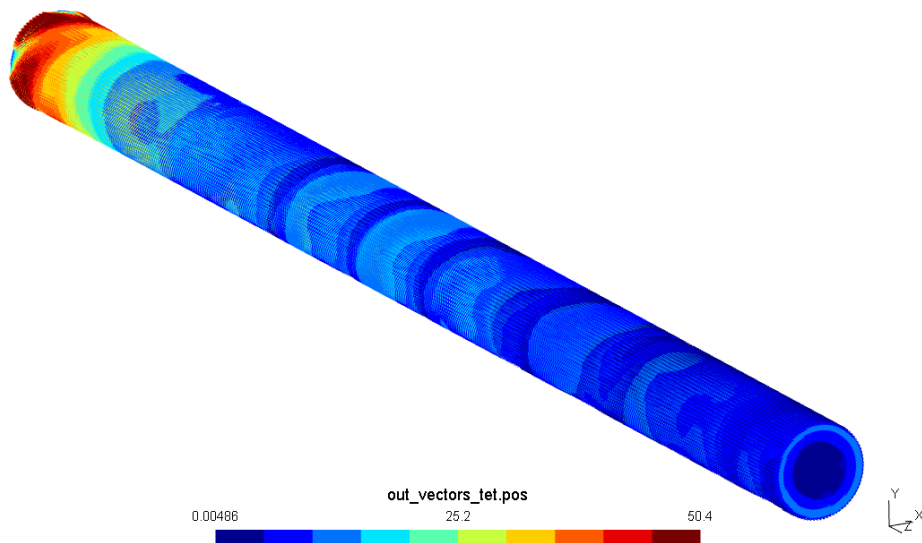
$$S = \frac{2\pi \int_0^R r^2 \rho V_\phi V_z dr}{2\pi R \int_0^R r \rho V_z^2 dr}. \quad (10)$$

Численно расчет интеграла показывает, что  $S \sim 32.3$ , т.е. данное течение можно отнести к интенсивно закрученным, [12]. Таким образом, задача является стресс-тестом с точки зрения точности метода, поскольку ожидается значительное перераспределение течения с образованием возвратных зон в закрученном потоке. Результаты расчетов анализируются путем построения графиков  $V_\phi, V_z$  для явной и неявной схемы, а также сопоставления с данными PIV. Сечения для сравнения показаны на рис. 4.



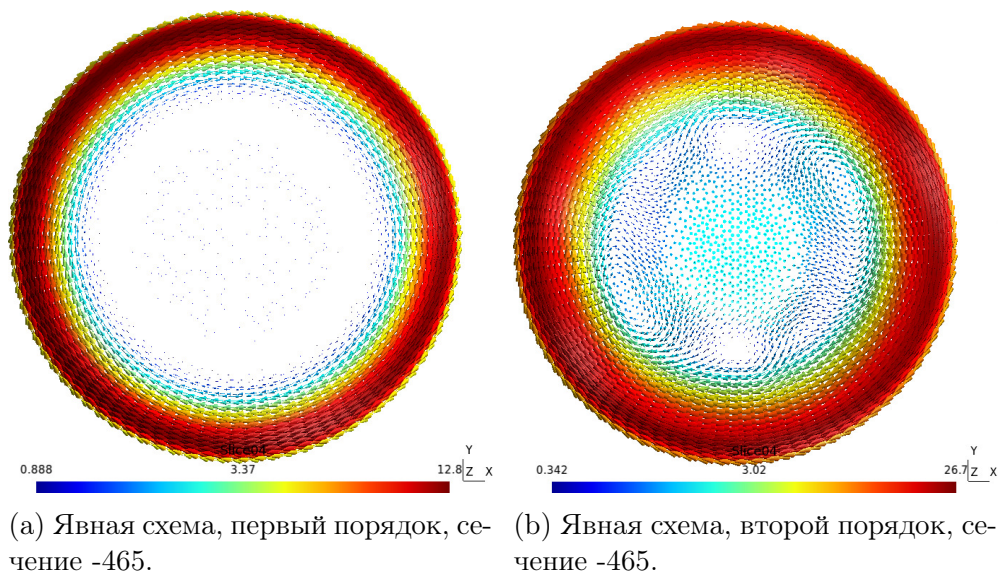
**Рис. 4.** Сечения для сопоставления результатов. Вход слева. Ноль отсчета справа. Справа налево:  $Z=-5$ ;  $Z=-100$ ;  $Z=-150$ ;  $Z=-200$ ;  $Z=-270$ ;  $Z=-310$ ;  $Z=-365$ ;  $Z=-465$ ;  $Z=-565$ ;  $Z=-664$ ;  $Z=-765$ .

Физическое время задачи для явной и неявной схемы идентичны. Решение проводилось до установления по квазипериодическому решению. Решения проводились для схем как первого, так и второго порядка аппроксимации по пространственным переменным. Трехмерный вид решения для неявной численной схемы второго порядка показан на рис. 5.



**Рис. 5.** Внешний вид решения задачи течения закрученного потока, неявная схема, мгновенные значения скорости.





**Рис. 6.** Сравнение первого и второго порядка аппроксимации. Мгновенные значения скорости, логарифмический масштаб векторов.

Сразу можно отметить, что методы первого порядка точности не пригодны для данной задачи. Наблюдаемая в эксперименте прецессия основного вихря и образование возвратных зон при расчете не наблюдались. Для сравнения на рис. 6 показано сопоставление мгновенных скоростей для методов первого и второго порядка.

Для сравнения на рис. 7 приведены решения для явной и неявной схем второго порядка.

Видно, что явный метод несколько более точен при сопоставлении мгновенных значений скоростей. Несмотря на это, прецессия вихря и возвратные рециркуляционные течения наблюдаются как в явной так и в неявной схеме, причем частота прецессии практически совпадает.

При сопоставлении осредненных значений скоростей, различия практически не наблюдаются. Так, для сечения -100 имеются данные PIV из [11] и можно провести сопоставление с результатами физического эксперимента. Такое сопоставление для осредненных скоростей показано на рис. 8. Можно отметить удовлетворительное совпадение результатов. Заниженное значение тангенциальной составляющей скорости для неявной схемы, скорее всего, связано с отсутствием модели турбулентности, поскольку расчет на CFL=300 без последней был сделан лишь в демонстративных целях.

В целом можно сказать, что изложенный неявный метод решения имеет достаточную точность для проведения прикладных расчетов. Сопоставление эффективности расчета явной и неявной схемы для данной задачи показано в следующем разделе.

## 7. Анализ производительности

Можно ожидать, что неявная схема расчета будет наиболее производительной на достаточно больших сетках, когда ограничение на шаг по времени сделает явную схему менее эффективной. Расчет, описанный в предыдущем разделе, производился на сетке размером в 1.5 миллиона ячеек. К сожалению, даже для такой сетки среднего размера мы столкнулись с проблемой нехватки памяти графических устройств. Так,

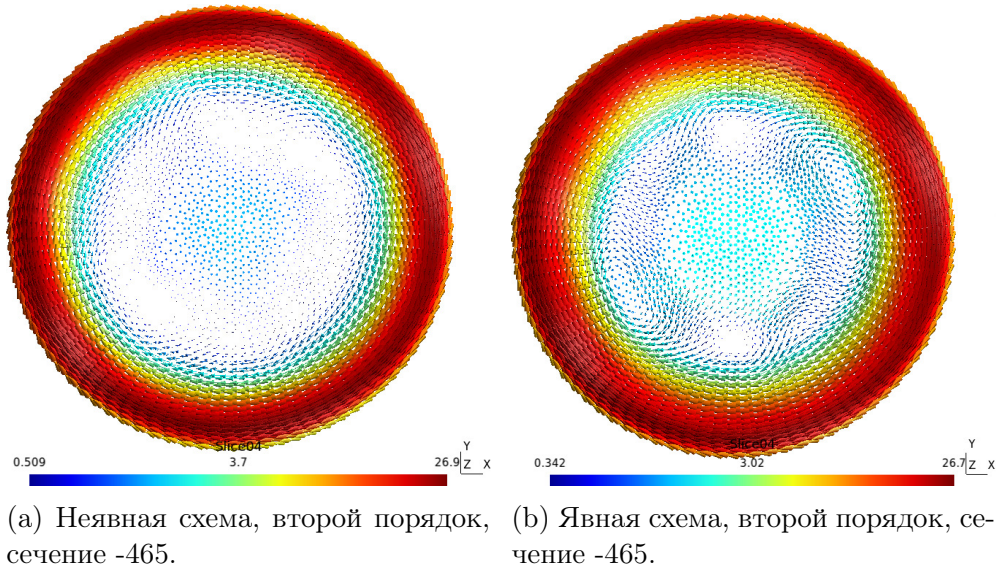


Рис. 7. Сравнение явного и неявного метода. Мгновенные значения скорости, логарифмический масштаб векторов.

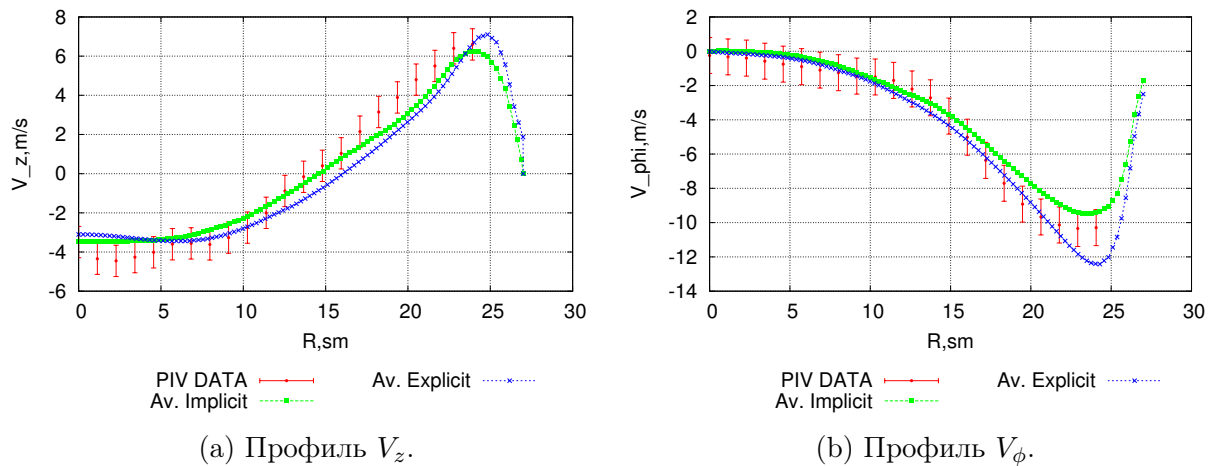
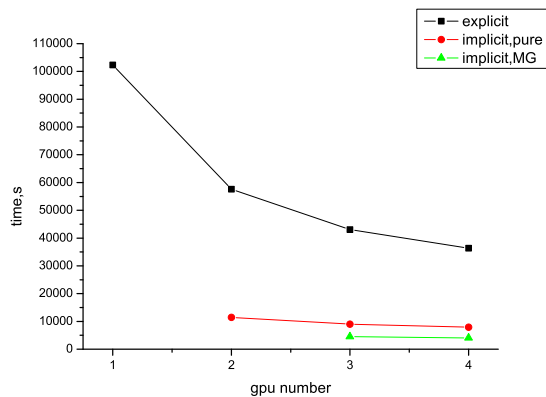
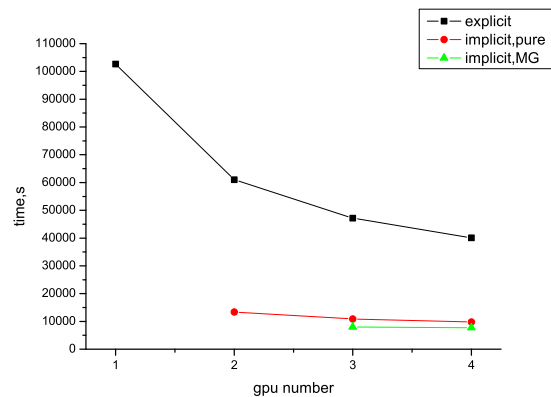


Рис. 8. Сравнение явного, неявного методов и физического эксперимента PIV, сечение -100, период осреднение 0.1с.



(a) Схема первого порядка.



(b) Схема второго порядка.

**Рис. 9.** Полное время решения задачи о закрученном потоке, сравнение явной схемы, неявной схемы и неявной схемы с использованием многосеточного подхода.

для неявной схемы с одним уровнем нам потребовалось как минимум 2 устройства GTX Titan Black для запуска задачи, для неявной схемы с двумя уровнями - 3 таких устройства. На рис. 9 мы приводим времена расчета для указанной задачи. Черный цвет соответствует явной схеме, красный - неявной схеме с одним уровнем, зеленый - неявной схеме с двумя уровнями. Рисунок слева относится к схеме первого порядка, рисунок справа - к схеме второго порядка. Отличие времен для схем различного порядка незначительно в случае явной схемы, что связано с переиспользованием градиентов необходимых для расчета вязких потоков в процедуре реконструкции. В случае неявной схемы расчет второго порядка требует на 20%–50% больше времени, что связано с ухудшением скорости сходимости схемы. В целом, использование неявной схемы для расчета первого порядка на данной задаче дает выигрыш относительно явной схемы примерно в 4-5 раз для схем с 1 уровнем и выигрыш примерно в 9-10 раз для схем с двумя уровнями. Для схем второго порядка с 1 уровнем показатели аналогичны, а вот эффективность от использования многосеточного подхода снижается. Эффективность распараллеливания для явной схемы варьируется на уровне от 75% до 90%. Из сопоставления времен выполнения следует, что эффективность распараллеливания неявной схемы примерно на 5% ниже.

## 8. Заключение

В рассмотренной работе кратко описана численная схема и метод решения для уравнений динамики вязкого теплопроводного сжимаемого газа. В отличие от более ранних работ авторов [8], разработанная неявная схема позволяет получить значительное ускорение на multigpu архитектуре с удовлетворительным коэффициентом масштабирования (до 80%). Проведены расчеты, подтверждающие валидность данного утверждения. В целом, разработанный численный метод может применяться для решения задач внутреннего и внешнего течения как в дозвуковых так и в сверхзвуковых режимах на неструктурированной сетке. Дальнейшие работы в данном направлении направлены на повышение порядка аппроксимации, улучшение сходимости решения СЛАУ и обобщение на гетерогенные вычислительные архитектуры.

## Список литературы

1. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. - Springer-Verlag, 1999.
2. Chung T. J. Computational Fluid Dynamics. - Cambridge University Press, 2002.
3. Ascher U. M., Ruuth S. J., Spiteri R. J. Implicit–explicit Runge–Kutta methods for time-dependent partial differential equations. // Applied Numerical Mathematics: Transactions of IMACS. Vol.25. pp.151–167. 1997.
4. George J. A. and Liu J. W-H. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. - Prentice-Hall, 1981.
5. Bramkamp F. D., Pollul B., Rasch A., Schieffer G. Matrix-Free Second-Order Methods in Implicit Time Integration for Compressible Flows Using Automatic Differentiation. // International Journal of Computational Science and Engineering. Vol.9. Issue 5/6. pp. 484–498. 2014.
6. Евстигнеев Н.М. Интегрирование уравнения Пуассона с использованием графического процессора технологии CUDA. // Журнал НИВЦ МГУ "Вычислительные методы и программирование". Т.10. Стр.268–274. 2009.
7. Евстигнеев Н.М. Интегрирование трехмерных уравнений невязкого газа на неструктурированной сетке с применением распределенных вычислений. //Журнал НИВЦ МГУ "Вычислительные методы и программирование". Т.8. Стр.252–264. 2007.
8. Евстигнеев Н.М. Конечно-объемная TVD схема для решения 2D эволюционных уравнений мелкой воды. // Журнал НИВЦ МГУ "Вычислительные методы и программирование". Т.7. Стр.108–112. 2006.
9. Евстигнеев Н.М., Рябков О.И. Курс лекций и практических занятий "CFD using CUDA". 2011–2012.
10. Evstigneev N.M., Magnitskii N.A. FSM Scenarios of Laminar-Turbulent Transition in Incompressible Fluids in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications , Jan Awrejcewicz and Peter Hagedorn (Ed.), ISBN: 978-953-51-0816-0, InTech, 2012.
11. Klimov A., Grigorenko A., Efimov A., Moralev I., Polyakov L., Sidorenko M., Tolkunov B., Evstigneev N., Ryabkov O. Vortex Control by Combined Electric Discharge Plasma. // Preprint AIAA-2013-0926.
12. Al-Kabie H.S. Radial Swirler for Low Emissions Gas Turbine Combustion. - PhD. Thesis, Univ. of Leeds, 1989.

Read More: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2013-926>