

# Вариант распределенного метода декомпозиции областей

В.П.Ильин<sup>1,2</sup>, Д.В.Перевозкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет  
Новосибирск, e-mail: [ilin@sscc.ru](mailto:ilin@sscc.ru)

ПАВТ-2014  
3 апреля 2014 г.  
Ростов-на-Дону

- Разделяй и властвуй — принцип распараллеливания
- Тройственная структура декомпозиции
- Параметризация пересечений и интерфейсов подобластей
- Двухуровневый алгоритм сбалансированной декомпозиции
- Предобусловленные итерации в подпространствах Крылова
- Примеры численных экспериментов

1. Domain Decomposition Methods. URL: <http://ddm.org> (дата обращения : 14.03.2012)
2. 22nd International Conference on Domain Decomposition Methods (DD22). URL: <http://dd22.ics.usi.ch/> (дата обращения : 31.11.2013)
3. Писсанецки С. Технология разреженных матриц.— М.: Мир, 1988.
4. Bramble J.H., Pasciak J., Wang J., Xu J. Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition.// Math. Comp. — 1991. — V. 57, N 195. — P. 1–21.

5. Берж К. Теория графов и ее применения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Бутюгин Д.С., Ильин В.П., Перевозкин Д.В. Методы параллельного решения СЛАУ на системах с распределенной памятью в библиотеке Krylov // Вестник ЮУрГУ. Серия “Вычислительная математика и информатика”, т. 47, N 306, 2012, С. 5–19.
7. Кластер НКС-30Т: URL: <http://www2.sccc.ru/НКС-30Т/НКС-30Т.htm> (дата обращения: 15.02.2013).

$$Au = f, \quad A = \{a_{ij}\} \in \mathcal{R}^{N,N},$$

$$A = \{A_p \in \mathcal{R}^{N_p, N}, \quad p = 1, \dots, P\}, \quad N_1 + \dots + N_p = N,$$

$$u = \{u_p \in \mathcal{R}^{N_p}\}, \quad f = \{f_p \in \mathcal{R}^{N_p}\},$$

$$A_{p,p}u_p + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^P A_{p,q}u_q = f_p, \quad p = 1, \dots, P,$$

$$A_p = \{A_{p,q}; \quad q = 1, \dots, P\}, \quad A = \{A_{p,q}; \quad p, q = 1, \dots, P\}$$

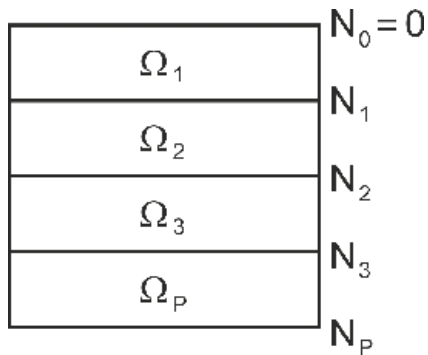


Рис. 1. Схема блочного разбиения матрицы

$$a_{i,i}u_i + \sum_{\substack{j \in \omega_i \\ j \neq i}} a_{i,j}u_j = f_i, \quad i \in \Omega^h,$$

$$A_{p,p}u_p^n = f_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^P A_{p,q}u_q^{n-1} \equiv g_p^{n-1},$$

$$V = \{v_i; i = 1, \dots, N\}, \quad E = \{(v_i, v_j) | a_{i,j} \neq 0\},$$

$$\Omega_p^\Delta = \Omega_p \cup \Gamma_p^1 \dots \cup \Gamma_p^\Delta,$$

$$\Gamma_p^\Delta = \Gamma_{p,q_1}^\Delta \cup \Gamma_{p,q_2}^\Delta \dots \cup \Gamma_{p,q_{m_p}}^\Delta$$

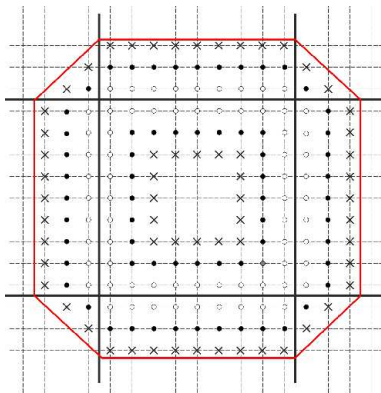


Рис. 2. Построение расширенных сеточных подобластей



$$\bar{\Omega}_p = \Omega_p \cup \Omega_{p,q_1}^\Delta \cdots \cup \Omega_{p,q_{m_k}}^\Delta,$$

$$\Omega_{p,q}^\Delta = \Gamma_{p,q}^1 \cup \Gamma_{p,q}^2 \cdots \cup \Gamma_{p,q}^\Delta, \quad q = q_1, \dots, q_{m_k},$$

$$\bar{A}_{p,p} \bar{u}_p^n = \bar{f}_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^P \bar{A}_{p,q} \bar{u}_q^{n-1} = \bar{g}_p^{n-1},$$

$$a_{i,i} u_i + \sum_{j \in \Omega_p} a_{i,j} u_j = f_i - \sum_{j \notin \Omega_p} a_{i,j} u_j,$$

$$\left( a_{i,i} + \theta \sum_{j \notin \Omega_p} a_{i,j} \right) u_i^n + \sum_{j \in \Omega_p} a_{i,j} u_j^n = f_i + \sum_{j \notin \Omega_p} a_{i,j} (\theta u_i^{n-1} - u_j^{n-1})$$

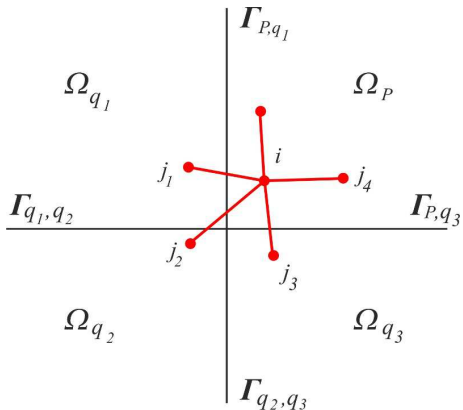


Рис. 3. Иллюстрация сеточного шаблона для околограничного узла

$$\bar{B}_p = \bar{A}_{p,p} + \theta D_p,$$

$$\bar{B}_p(\bar{u}_p^n - \bar{u}_p^{n-1}) = \bar{r}_p^{n-1} \equiv \bar{f}_p - (A\bar{u}^{n-1})_p,$$

$$D_p = \text{diag}\{d_{i,i} = \sum_{j \neq \Omega_p} a_{i,j}\},$$

$$G(V, E) = \bigcup G_p(V_p, E_p),$$

$$G' = (V', E'), \quad E' = \{(V_i, V_j) \mid \exists u \in V_i, v \in V_j \mid (u, v) \in E\},$$

```

i = 1
while {u ∈ V | C(u) = 0} ≠ ∅
    pick any v from {u ∈ V | C(u) = 0}
    Q := {v}
    n = 0
    while (n < nmax and Q ≠ ∅)
        v ← Q
        C(v) := i
        Q ← (Adj(v) ∩ {u ∈ V | C(u) = 0}) \ Q
        n = n + W(v)
    end while
    i = i + 1
end while

```

Краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в единичном кубе:

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = g, \quad \Omega = [0 \times 1]^3; \quad \Omega^h = \{i, j, k\},$$

$$(Au^h)_{i,j,k} = 6u_{i,j,k}^h - u_{i-1,j,k}^h - u_{i,j-1,k}^h -$$

$$-u_{i+1,j,k}^h - u_{i,j+1,k}^h - u_{i,j,k-1}^h - u_{i,j,k+1}^h = f_{i,j,k}^h,$$

$$i, j, k = 1, \dots, M, \quad f^h = \{f_{i,j,k}^h\}, \quad u^h = \{u_{i,j,k}^h\} \in \mathcal{R}^{M^3}.$$

# Решение модельной задачи с использованием PARDISO в подобластях, $\varepsilon^e = 10^{-7}$

$N \setminus P$	1	2	4	8	16	32
$64^3$	1	29	32	39	54	78
	32.2	14.2	6.39	2.88	3.42	1.58
	164	93.5	55.1	46.3	232	200
$128^3$	1	40	44	53	75	108
	885	221	86.6	30.1	20.4	12.6
	10340	4987	1785	782	1232	1615
$256^3$	—	—	60	72	102	142
			2222	332	212	138
			100009	13450	18400	18210

Легенда	$n_{iter}^e$
	$t_{wall}$
	$t_{CPU}$

Решение той же модельной задачи с использованием предобусловленного BiCGStab в подобластях,  
 $\varepsilon^e = 10^{-7}$ ,  $\varepsilon^i = 0.1$ ,  $n_{max}^i = 10$

$N \setminus P$	1	2	4	8	16	32
$64^3$	9	29	34	47	65	98
	4.05	6.35	3.44	1.54	1.59	2.26
$128^3$	4.05	12.7	13.2	12.3	20.9	77.3
	18	58	56	67	92	132
$256^3$	64.9	115	57.4	25.2	15.9	18.3
	64.9	230	229	201	215	510
$256^3$	21	64	74	92	143	92
	606	1045	647	443	271	231
	606	2079	2588	3553	3916	6627

Легенда	$n_{iter}^e$
	$t_{wall}$
	$t_{CPU}$

# Влияние точности решения СЛАУ в подобластях на скорость сходимости и ресурсоемкость

Задача	Критерии			
	$\epsilon^i = 0.1$ $n_{max}^i = 10$	$\epsilon^i = 0.01$ $n_{max}^i = 20$	$\epsilon^i = 0.001$ $n_{max}^i = 40$	PARDISO
$P = 8$ $N = 128^3$	67	57	54	53
	3297	5280	7040	424
	25.2	39.9	52.2	30.1
	201	318	415	782
$P = 16$ $N = 256^3$	143	111	108	102
	15929	18843	25489	1632
	271	319	427	212
	3916	5112	6824	18400

Легенда	$n_{iter}^e$
	$n_{iter}^i$
	$t_{wall}$
	$t_{CPU}$



Сравнительный анализ МДО без перехлеста для прямых и итерационных решателей в подобластях,  $\theta = 0$ ,  $N = 128^3, 256^3$ : количество итераций и время решения

Метод	$N$	$P$				
		1	8	16	32	64
прямой	$128^3$	1 885	53 30.1	75 20.4	108 12.6	130 18.1
	$256^3$	—	72 332	102 212	142 138	169 189
итерационный	$128^3$	18 64.9	68 20.5	92 12.5	130 13.0	197 11.9
	$256^3$	18 606	99 296	132 203	197 139	262 115

## Решение модельной задачи с использованием дополнительного агрегационного предобуславливания

Зависимость количества внешних итераций от  $m$  (числа шагов между корректировками) с разными решателями в подобластях

$N \setminus m$	1	5	10	15	20	$\infty$
$128^3$ , direct	50	46	41	42	46	82
$128^3$ , iterative	62	53	52	57	58	132
$256^3$ , direct	70	54	51	53	53	143
$256^3$ , iterative	60	72	61	62	68	193

# Влияние перехлеста на трудоемкость решения

Количество итераций и время решения для различных параметров перехлеста  $\Delta$ ,  $\theta = 0$ ,  $N = 128^2, 256^2$

N	P	$\Delta$					
		0	1	2	3	4	5
$128^3$	4	18	11	9	7	7	6
		1.75	1.45	1.37	1.26	1.26	1.20
	16	32	18	14	12	11	9
		1.42	1.18	1.19	1.09	0.89	0.79
	64	43	26	19	16	14	12
		1.56	1.66	1.39	1.50	1.56	0.86
$256^3$	4	27	16	12	10	9	8
		6.85	4.37	3.51	3.02	2.82	2.49
	16	41	24	20	17	14	14
		3.85	2.83	2.20	1.80	1.38	1.66
	64	60	36	27	22	20	18
		4.75	4.16	3.35	3.11	3.00	4.66

## Зависимость скорости сходимости от выбора параметров граничных условия в подобластях

Количество итераций для декомпозиции без пересечений с различными  $\theta$ ,  $N = 128^2, 256^2$

$P \setminus \theta$	0	0.5	0.6	0.7	0.9975
4	18 27	16 26	16 24	14 23	10 12
16	32 41	28 40	27 39	27 40	31 75
64	43 60	42 56	40 55	41 55	93 86