CHEBYSHEV: концепция вычислительной интегрированной среды для сеточных аппроксимаций начально-краевых задач

Д.С.Бутюгин[1], В.П.Ильин[1,2]

[1]Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
[2]Новосибирский государственный университет
Новосибирск, e-mail: ilin@sscc.ru

ПАВТ-2014
3 апреля 2014 г.
Ростов-на-Дону

Содержание

- **Фундаментальные вопросы аппроксимации**
- **Технологический взгляд на сеточные методы**
- **Аппроксимация:** $\text{ССД} + \text{ГСД} + \text{ФСД} \to \text{АСД}$
- **Принципы поэлементных технологий**
- **Поддержка декомпозиционных и многосеточных подходов**
- **Использование апостериорных и априорных оценок**
- **Принципы автоматизации построения алгоритмов**

Литература

1. ANSYS — Simulation Driven Product Development: URL: www.ansys.com (дата обращения: 01.12.2013).
2. MSC Nastran — Industry Leading Multidisciplinary FEA:
   URL: www.mscsoftware.com/product/msc-nastran (дата обращения: 01.12.2013).
3. OpenFOAM® — The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox:
   URL: www.openfoam.com (дата обращения: 01.12.2013).
4. DUNE Numerics: URL: www.dune-project.org (дата обращения: 01.12.2013).

5. Ильин В.П., Скопин И.Н. Технологии вычислительного программирования // Программирование, 2011. N. 4, C. 53–72.
6. Ильин В.П. DELAUNAY: технологическая среда генерации сеток // СибЖИМ, 2013. Т. 16, N. 2(54). С. 83–97.
7. Бутюгин Д.С., Гурьева Я.Л., Ильин В.П., Перевозкин Д.В., Петухов А.В., Скопин И.Н. Функциональность и технологии алгебраических решателей в библиотеке Krylov // Вестник ЮУрГУ. Серия "Вычислительная математика и информатика", 2013. Т. 2, N. 3. С. 92–105.
8. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН, 2001. 318 с.

9. Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН, 2007. 370 с.
10. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal., 2002. Vol. 39, N. 5. P. 1749–1779.
11. Kirby R.C, Logg A. A Compiler for Variational Forms // ACM Transactions on Mathematical Software. 2006. Vol. 32, N. 3. P. 417–444.

Фундаментальные вопросы аппроксимации

- аппроксимируемые объекты и пространства: дифуры, ГИУ, вариационные соотношения (МКЭ, РМГ), законы сохранения (МКО), начально-краевые условия, уравнения на многообразиях
- понятия порядка погрешности и сходимости, теоретические и экспериментальные исследования, гарантированная точность наследование непрерывных свойств на дискретном уровне
- алгебраические свойства сеточных дискретных линейных и нелинейных уравнений

Технологический взгляд на сеточные методы

- **методы конечных объемов (МКО, FEM)**

$$\nabla p \nabla u = f(x,y),$$

$$\bar{D}_k = D_k \bigcup_{i=1}^{i_k} S_i - \textbf{ячейка Дирихле–Вороного}$$

$$-\sum_{i=1}^{i_k} \int\limits_{S_i} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} p \mathrm{d}s = \int\limits_{D_k} f(x,y) \mathrm{d}v,$$

$$\sum_{i=1}^{i_k} J_i = \sum_{i=1}^{i_k} \int\limits_{V_{k,i}} f(x,y) \mathrm{d}v = \sum_{i=1}^{i_k} f_{k,i}, \quad J = -p \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$u^{(j)} = \begin{bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ u_3^{(j)} \end{bmatrix}, \quad J^{(j)} = \begin{bmatrix} J_1^{(j)} \\ J_2^{(j)} \\ J_3^{(j)} \end{bmatrix},$$

$$J^{(j)} = A^{(j)} u^{(j)}, \quad A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(j)} & a_{1,2}^{(j)} & a_{1,3}^{(j)} \\ a_{2,1}^{(j)} & a_{2,2}^{(j)} & a_{2,3}^{(j)} \\ a_{3,1}^{(j)} & a_{3,2}^{(j)} & a_{3,3}^{(j)} \end{bmatrix},$$

$$P_j u^{(j)} = u^h, \quad \bar{A}^{(j)} = P_j^T A^{(j)} P_j,$$

$$A = \sum_j \bar{A}^{(j)} \in \mathcal{R}^{N,N}, \;\; A u^h = f \in \mathcal{R}^N, \;\; A = \{a_{i,k}\}$$

- методы конечных элементов (МКЭ, FEM)

$$
\begin{aligned}
&\vec{g} = p\nabla u, \quad -\nabla\vec{g} = f, \quad u|_{\Gamma} = 0,\\
&\int\limits_G \vec{g}\cdot\vec{v}\,dV - \int\limits_G p\nabla u\cdot\vec{v}\,dV = 0,\\
&\int\limits_G \vec{g}\cdot\nabla w\,dV - \int\limits_{\partial G} \vec{n}\cdot\vec{g}w\,ds = \int\limits_G fw\,dV,\\
&\int\limits_G \vec{g}\cdot\nabla w\,dV = \int\limits_G fw\,dV,\\
&\begin{bmatrix} M & B\\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g\\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ F \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$M_{i,j} = \int\limits_G \vec{\psi}_j \cdot \vec{\psi}_i dV,$$

$$B_{i,j} = -\int\limits_G p \nabla \varphi_j \cdot \vec{\psi}_i dV,$$

$$C_{i,j} = \int\limits_G \vec{\psi}_j \cdot \nabla \varphi_i dV,$$

$$F_i = \int\limits_G f \varphi_i dV,$$

$$V_h = \{v \in L^2(G) : \; v|_T \in \mathcal{P}_q(T) \; \forall T \in G_h\},$$
$$W_h = \{w \in [L^2(G)]^2 : \; w|_T \in W(T)$$
$$\forall T \in G_h\},$$

$$\int_T \vec{g}_h \cdot \vec{w}_h dV = -\int_T p u_h \nabla \cdot \vec{w}_h dV + \int_{\partial T} \hat{u}_T \vec{n}_T \cdot \vec{w}_h ds, \quad \forall \vec{w}_h \in W(T),$$

$$\int_T \vec{g}_h \cdot \nabla v_h dV - \int_{\partial T} \hat{g}_T \cdot \vec{n}_T v_h \, ds = \int_T f \; v_h \, dV, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_q(T).$$

$\hat{u}_T, \hat{g}_T$ – **следы функций на границах**

Алгебраическая структура данных

$$Au = f,\ A = \{a_{i,j}\} \in \mathcal{R}^{N,N},\ f = \{f_i\},$$

$$A = \{A_{p,q};\, p, q = 1, ..., P \ll N\}$$

сжатые разреженные форматы

CSR - Compressed Sparse Row:

для каждой i-й строки -

m_i **- число ненулевых элементов,**

$a_{i,j}, j = 1, ..., m_i$ **- вещественные значения,**

$j = j_1^{(i)}, ..., j_{m_i}^{(i)}$ **- номер столбцов,**

BCSR - Block CSR