

# Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах \*

Е.Н. Акимова<sup>1,2</sup>, В.Е. Мислов<sup>1,2</sup>, А.Ф. Миниахметова<sup>1,2</sup>

Институт математики и механики УрО РАН<sup>1</sup>, Уральский федеральный университет<sup>2</sup>

Для решения трехмерной структурной обратной задачи магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной намагниченности предложены быстрый покомпонентный метод типа Ньютона для модели двухслойной среды и регуляризованные методы градиентного типа с переменными весовыми множителями для модели нижнего полупространства в форме многослойной среды. На основе методов типа Ньютона и методов градиентного типа решения задач магнитометрии для моделей двухслойной и трехслойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA. Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Для модельной задачи магнитометрии проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

## 1. Введение

Важнейшими задачами исследования структуры земной коры являются обратные задачи грави-магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела между средами [1, 2]. Задачи гравиметрии и магнитометрии описываются нелинейными интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, т.е. являются существенно некорректными задачами. После дискретизации задачи сводятся к системам нелинейных уравнений большой размерности (до нескольких сотен тысяч). Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения эффективности решения геофизических задач является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) установлены суперкомпьютеры МВС-ИММ и «Уран», которые успешно используются при решении прикладных задач. Суперкомпьютер «Уран» включает в себя 48 вычислительных узлов, состоящих из Multi-Core CPU Intel Xeon (4, 6 и 8 ядер) и 8 GPU NVIDIA Tesla (448 и 512 ядер).

В данной работе для модели нижнего полупространства в форме двухслойной среды для решения трехмерной структурной обратной задачи магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами постоянной намагниченности предложен быстрый покомпонентный метод типа Ньютона. Для модели нижнего полупространства в форме многослойной среды для решения структурной задачи магнитометрии предложен подход, основанный на применении линеаризованных методов градиентного типа с переменными весовыми множителями, позволяющий по суммарному полю находить из интегрального уравнения несколько структурных границ.

На основе методов типа Ньютона и методов градиентного типа решения задач магнитометрии для двухслойной и трехслойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящих в состав суперкомпьютера «Уран». Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах». Для модельной задачи магнитометрии проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

---

\* Работа выполнена при поддержке УрО РАН по программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 7 (проект 12-П-1-1023, проект 12-П-15-2019), по проекту РЦП-14-И11 и при частичной поддержке РФФИ (проект 12-01-00106-а).

## 2. Алгоритмы решения структурных обратных задач магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред

### 2.1 Структурная задача магнитометрии о нахождении поверхности раздела для модели двухслойной среды

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и скачке вектора намагниченности. Предполагается, что модель нижнего полупространства состоит из двух слоев постоянной намагниченности  $J_l$  ( $l=1,2$ ), разделенных искомой поверхностью  $S$  (рис. 1).

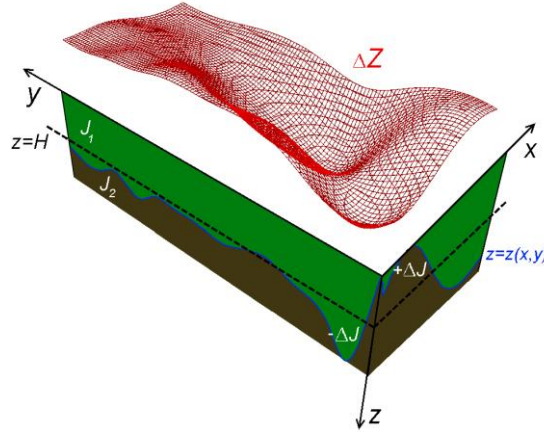


Рис. 1. Модель двухслойной среды

В предположении, что магнитная аномалия создана отклонением искомой поверхности  $S$  от горизонтальной плоскости  $z = H$  (ось  $z$  направлена вниз), в декартовой системе координат функция  $z = z(x, y)$ , описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A(z) \equiv \Delta J \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{z(x', y')}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y') \right]^{3/2}} - \frac{H}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2 \right]^{3/2}} \right\} dx' dy' = \Delta z(x', y', 0), \quad (1)$$

где  $\Delta J$  – скачок вертикальной компоненты вектора намагниченности на границе раздела сред,  $\Delta z(x, y)$  – аномальное магнитное поле,  $z = H$  – асимптотическая плоскость для данной границы раздела, т.е.  $\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z(x, y) - H| = 0$ .

Предварительная обработка магнитных данных, связанная с выделением аномального поля из общих магнитных данных, выполняется по методике, предложенной в работе [3].

Обратная задача магнитометрии является существенно некорректной задачей, решение которой обладает сильной чувствительностью к погрешности правой части, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

После дискретизации уравнения (1) на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть  $\Delta z(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам имеем систему нелинейных уравнений

$$A_n[z] = F_n. \quad (2)$$

## 2.2 Методы решения структурной задачи магнитометрии для двухслойной среды

Для решения структурной задачи магнитометрии (1) при решении системы нелинейных уравнений (2) можно использовать итеративно регуляризованный метод Ньютона (МН) [4]

$$z^{k+1} = z^k - \left[ A_n'(z^k) + \bar{\alpha} I \right]^{-1} \left[ A_n(z^k) + \alpha(z^k - H) - F_n \right]; \quad (3)$$

либо модифицированный метод Ньютона (ММН), когда производная в обрачаемом операторе вычисляется в фиксированной точке  $z^0 = \text{const}$  [5]

$$z^{k+1} = z^k - \left[ A_n'(z^0) + \bar{\alpha} I \right]^{-1} \left[ A_n(z^k) + \alpha(z^k - H) - F_n \right]. \quad (4)$$

Здесь  $A_n(z^k)$  и  $F_n$  – конечномерные аппроксимации интегрального оператора и правой части в уравнении (1),  $A_n'(z^k)$  – производная оператора  $A$  в точке  $z^k$ ,  $I$  – единичный оператор;  $\alpha, \bar{\alpha}$  – положительные параметры регуляризации,  $k$  – номер итерации.

Нахождение очередного приближения  $z^{k+1}$  метода Ньютона (3) либо его модифицированного варианта (4) сводится к решению СЛАУ

$$A_n^k z^{k+1} = F_n^k, \quad (5)$$

где  $A_n^k = A_n'(z^k) + \bar{\alpha} I$  – плохо обусловленная несимметричная заполненная  $n \times n$  матрица для метода (3) либо симметричная  $n \times n$  матрица  $A_n^k = A_n'(z^0) + \bar{\alpha} I$  для метода (4). Вектор  $F_n^k$  размерности  $n$  имеет вид  $F_n^k = A_n^k z^k - (A_n(z^k) + \alpha(z^k - H) - F_n)$ .

Заметим, что в общем случае решения задачи методом Ньютона предварительно СЛАУ (5) приводится к виду с симметричной матрицей

$$D^k z^{k+1} \equiv \left[ (A_n^k)^T A_n^k + \tilde{\alpha} I \right] z^{k+1} = (A_n^k)^T F_n^k \equiv b, \quad (6)$$

где  $(A_n^k)^T$  – транспонированная матрица,  $\tilde{\alpha}$  – параметр регуляризации.

Условием останова итерационных процессов (3)–(4) является выполнение условия  $\|A_n[z] - F_n\| / \|F_n\| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$ .

На каждом шаге методов типа Ньютона для нахождения очередного приближения  $z^{k+1}$  с помощью решения СЛАУ (5) либо (6) могут быть использованы итерационные методы градиентного типа: простой итерации, минимальных невязок, минимальной ошибки, наискорейшего спуска или сопряженных градиентов в регуляризованном варианте [6, 7].

В данной работе для решения структурных обратных задач грави-магнитометрии в двухслойной среде, кроме итерационных процессов типа Ньютона (3) и (4), предлагается быстрый покомпонентный метод типа Ньютона.

Для сетки  $n = M \times N$  систему нелинейных уравнений (2) можно представить как совокупность нелинейных уравнений относительно неизвестных компонент  $z_{m,l}$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $l = 1, \dots, N$ . Перенумеруем точки сетки по горизонтали и рассмотрим на сетке вектор  $z$  с компонентами  $z_{ml}$ ,  $ml = 1, \dots, M \times N$ .

Запишем уравнения системы (2) для каждой точки  $z_{ml}$  сетки  $n = M \times N$  в виде

$$\left( A_n[z] \right)_{ml} = F_{ml}, \quad (7)$$

где  $F_{ml}$  – значение выделенного аномального магнитного поля в точке  $z_{ml}$ ,

$$(A_n[z])_{ml} = \Delta J \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{z(x'_i, y'_j)}{\left[ (x_m - x'_i)^2 + (y_l - y'_j)^2 + z^2(x'_i, y'_j) \right]^{3/2}} - \frac{H}{\left[ (x_m - x'_i)^2 + (y_l - y'_j)^2 + H^2 \right]^{3/2}} \right\} \Delta x'_i \Delta y'_j.$$

Для решения нелинейных уравнений системы (7) итерационный покомпонентный метод типа Ньютона (ПМН) имеет вид:

$$z_{ml}^{k+1} = z_{ml}^k - \gamma \left[ (A_n[z^k])_{ml} - F_{ml} \right] / \tilde{A}[z_{ml}^k], \quad (8)$$

где

$$\tilde{A}[z_{ml}] = \Delta J \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{z(x_m, y_l)}{\left[ (x_m - x'_i)^2 + (y_l - y'_j)^2 + z^2(x_m, y_l) \right]^{3/2}} - \frac{3z^2(x_m, y_l)}{\left[ (x_m - x'_i)^2 + (y_l - y'_j)^2 + z^2(x_m, y_l) \right]^{5/2}} \right\} \Delta x'_i \Delta y'_j$$

(сумма элементов строки матрицы производной  $A_n[z]$ ),  $\gamma$  – положительный регулирующий параметр,  $k$  – номер итерации.

В качестве начального приближения выбирается  $z_{ml}^0 = H$ . Условием останова итерационного процесса (8) является выполнение условия  $\max_{ml} |(A_n[z])_{ml} - F_{ml}| / \max_{ml} |F_{ml}| < \varepsilon$  при  $\varepsilon > 0$ .

### 2.3 Структурная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред для модели многослойной среды и методы ее решения

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и скачкам векторов намагниченности. Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной намагниченности  $J_l$  ( $l=1, \dots, L$ ), разделенных искомыми поверхностями  $S_l$ , где  $L$  – число границ раздела (рис. 2). Магнитный эффект от такого полупространства равен сумме магнитных эффектов от всех поверхностей раздела.

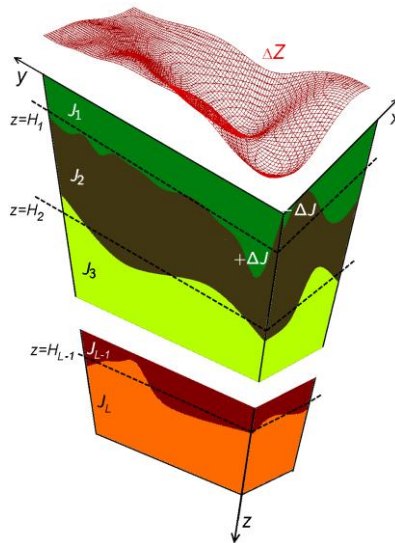


Рис. 2. Модель многослойной среды

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями  $z_l = z_l(x, y)$ , скачки вертикальных компонент векторов намагниченности на них равны  $\Delta J_l$ , поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости  $z_l = H_l$ , т.е.  $\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z_l(x, y) - H_l| = 0$ .

Функции  $z_l = z_l(x, y)$ , описывающие искомые поверхности раздела, удовлетворяют нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A(z) \equiv \sum_{l=1}^L \Delta J_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{z(x', y')}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y) \right]^{3/2}} - \frac{H}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2 \right]^{3/2}} \right) dx dy = \Delta z(x', y', 0), \quad (9)$$

где  $\Delta z(x, y)$  – аномальное магнитное поле,  $\Delta z(x, y) = \sum_{l=1}^L \Delta z_l$  – суммарное поле.

После дискретизации уравнения (6) на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть  $\Delta z(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора  $B(z)$  по квадратурным формулам имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности  $M \times N$ , результирующий вектор решения  $z(x, y) = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$  размерности  $L \times M \times N$ , матрицу производной оператора  $A'(z^k)^T$  размерности  $L \times M^2 \times N^2$  и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n. \quad (10)$$

Задача является недоопределенной, т.к. по заданной функции  $\Delta z(x, y)$  мы пытаемся найти несколько неизвестных функций  $z_l = z_l(x, y)$ , что влечет неединственность решения.

Для решения задачи магнитометрии для модели многослойной среды при решении системы нелинейных уравнений (10) предлагается использовать линеаризованные итерационные методы градиентного типа с весовыми множителями  $\gamma_i$ , вычисляемыми для каждой компоненты  $z_i$  ( $i = 1, \dots, L \times M \times N$ ) (см. [8, 9] для решения задачи гравиметрии):

- линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F); \quad (11)$$

- линеаризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|A(z^k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (12)$$

где  $z_i$  –  $i$ -компонента результирующего вектора  $z(x, y)$ ;  $k$  – номер итерации.

Переменные весовые множители  $\gamma_i$  для каждой компоненты  $z_i$  ( $i = 1, \dots, L \times M \times N$ ) выбираются специальным образом путем нормировки аномальных магнитных полей (соответствующих искомым поверхностям раздела  $S_l$  ( $l = 1, \dots, L$ )), выделенных из общего магнитного поля  $\Delta z(x, y)$  для каждой границы раздела по методике [3].

Весовые множители  $\gamma_i$  будем выбирать следующим образом:

$$F = [F_1, F_2, \dots, F_L] = (f_1, f_2, \dots, f_{M \times N}, \dots, f_{L \times M \times N}) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \times M \times N}),$$

$$\gamma_i = \alpha \frac{|f_i|^\beta}{\max_i |f_i|^\beta}, \quad \gamma_i \in [0, \alpha], \quad \beta > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (13)$$

где  $F_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ) – аномальные поля от магнитных масс, находящиеся ниже соответствующих глубин  $H_l$  для искомым поверхностей раздела  $S_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ),  $\alpha$  – параметр регуляризации.

В качестве начального приближения используются горизонтальные асимптотические плоскости  $z_i^0 = H_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ). Условием останова итерационных процессов (11)–(12) является выполнение условия  $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ , где  $F = \sum_{l=1}^L F_l$ .

Заметим, что линейризованные методы градиентного типа с постоянным множителем  $\gamma$  можно использовать при решении задачи магнитометрии для модели двухслойной среды.

### 3. Распараллеливание и численная реализация итерационных методов решения обратных задач

Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела для модели двухслойной на основе итеративно регуляризованного метода Ньютона, модифицированного метода Ньютона и покомпонентного метода типа Ньютона, а также параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии для моделей трехслойной и четырехслойной среды на основе линейризованных методов градиентного типа численно реализованы на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран» (ИММ УрО РАН). Параллельные алгоритмы реализованы на многоядерном процессоре Intel с помощью технологии OpenMP и библиотеки Intel MKL, на GPU NVIDIA Tesla – с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS,

При реализации на многоядерном процессоре распараллеливание итерационных методов градиентного типа и методов типа Ньютона основано на разбиении матрицы  $A$  СЛАУ горизонтальными полосами на  $m$  блоков, а вектора решения  $z$  и вектора правой части  $b$  СЛАУ на  $m$  частей так, что  $n = m \times L$ , где  $n$  – размерность системы уравнений,  $m$  – число процессоров,  $L$  – число строк матрицы в блоке. На текущей итерации каждый из  $m$  процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы  $A$  на вектор  $z$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк матрицы  $A$  на вектор  $z$ . В случае матричного умножения  $A^T A$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы  $A^T$  на всю матрицу  $A$ . Host-процессор (ведущий) отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

С целью оптимизации выполнения векторно-матричных операций проведено распараллеливание и векторизация циклов с помощью технологии OpenMP и средств компилятора Intel.

При реализации на графических процессорах NVIDIA линейризованных итерационных методов наискорейшего спуска и минимальной ошибки проведена оптимизация работы с памятью. Наилучшим по быстродействию оказывается метод вычисления элементов матрицы  $A'$  «на лету», т.е. вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в память видеокарты.

Алгоритмы решения структурных обратных задач магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела сред встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислителях» [10], установленный в Отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики

УрО РАН. В настоящее время на веб-портале предусмотрен запуск программ для решения задач грави-магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» с указанием числа процессорных узлов или ядер (MBC, NVIDIA Tesla, Multi-Core CPU), вида задачи и метода решения задачи.

#### 4. Результаты численных экспериментов

Результаты численных расчетов решения структурной задачи гравиметрии с модельными данными для трехслойной среды на многопроцессорных системах приводятся в работе [8].

Здесь мы рассмотрим решение структурной задачи магнитометрии для трехслойной среды, разделенной двумя искомыми поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  с модельными данными на площади  $S$ , имеющей размеры  $90 \times 100$  км<sup>2</sup>.

Суммарное магнитное поле  $\Delta z$  на площади  $S$  находилось путем решения прямой задачи магнитометрии с известными точными решениями (рис. 3) :

$$z_1(x, y) = 5 + 4e^{-(x/10-3.5)^6 - (y/10-2.5)^6} - 3e^{-(x/10-5.5)^6 - (y/10-4.5)^6};$$

$$z_2(x, y) = 15 + 7e^{-(x/20-1.5)^2 - (y/20-1.5)^2} - 6e^{-(x/20-3)^2 - (y/20-2)^2}.$$

Расстояния до асимптотических плоскостей принимались равными  $H_1 = 5$  км и  $H_2 = 15$  км. Скачки вертикальных компонент векторов намагниченности принимались равными  $\Delta J_1 = \Delta J_2 = 0.4$  А/м. Шаги сетки составили  $\Delta x = \Delta y = 1.0$  км.

После дискретизации уравнения (9) на сетке имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности 9000, результирующий вектор решения  $z(x, y) = [z_1(x, y), z_2(x, y)]$  размерности 18000, матрицу производной оператора  $A'(z^k)^T$  размерности  $18000 \times 9000$  и систему нелинейных уравнений вида (10).

На рис. 3 изображены модельные поверхности «квадратные горка и впадина» и «горка и впадина». На рис. 4 приводится суммарное магнитное поле  $\Delta z$  от модельных поверхностей без шума и с равномерным шумом с амплитудой 15%.

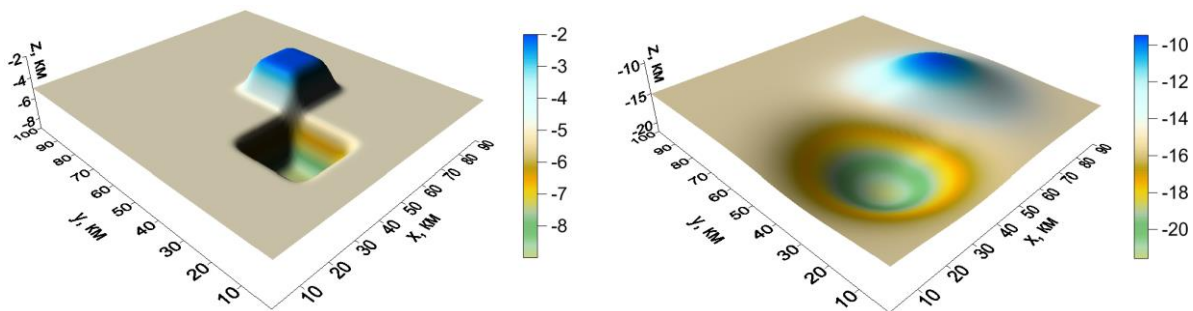


Рис. 3. Точные решения  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  для трехслойной среды

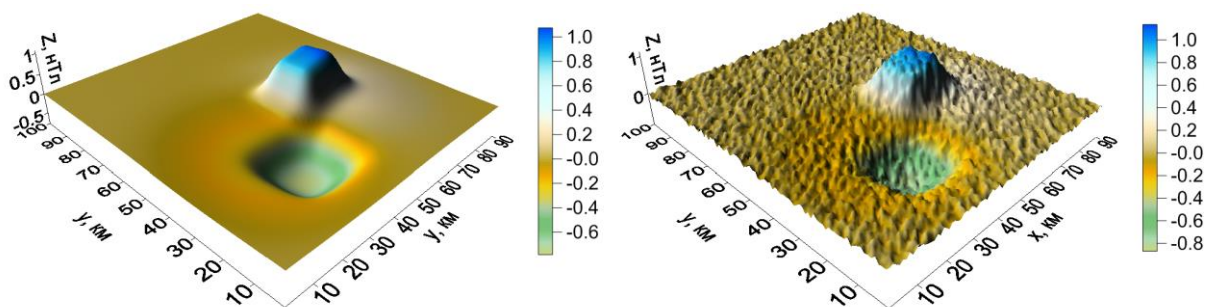


Рис. 4. Суммарное магнитное поле без шума и с шумом

Задача решалась двумя способами: 1) восстановление обеих поверхностей по суммарному полю линейризованными методами наискорейшего спуска (11) и минимальной ошибки (12) с переменными весовыми множителями  $\gamma_i$ ; 2) восстановление каждой поверхности по отдельности по соответствующему полю, выделенному по методике [3], линейризованными методами наискорейшего спуска и минимальной ошибки с постоянным множителем  $\gamma$  либо методами типа Ньютона (3), (4), (8), описанными в пункте 2.2. На каждом шаге МН и ММН используется метод минимальных невязок.

На рис. 5 и 6 приводятся приближенные решения структурной задачи магнитометрии для трехслойной среды для модели без шума. На рис. 5 изображены поверхности раздела, восстановленные по суммарному полю методом ЛММО с весовыми множителями, на рис. 6 – поверхности раздела, восстановленные по выделенным полям.

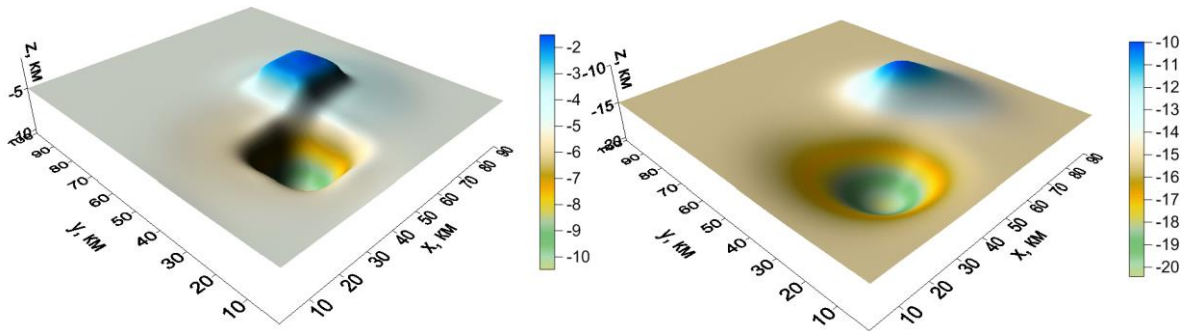


Рис. 5. Приближенные решения  $\hat{z}_1(x, y)$  и  $\hat{z}_2(x, y)$ , восстановленные по суммарному полю (без шума)

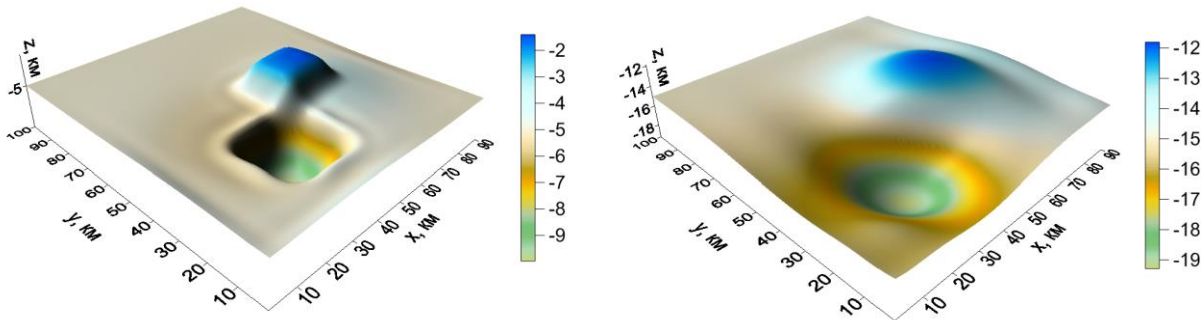


Рис. 6. Приближенные решения  $\hat{z}_1(x, y)$  и  $\hat{z}_2(x, y)$ , восстановленные по выделенным полям (без шума)

На рис. 7 и 8 приводятся приближенные решения структурной задачи магнитометрии для трехслойной среды для модели с шумом с амплитудой 15%. На рис. 7 изображены поверхности раздела, восстановленные по суммарному полю методом ЛММО с весовыми множителями, на рис. 8 – поверхности раздела, восстановленные по выделенным полям.

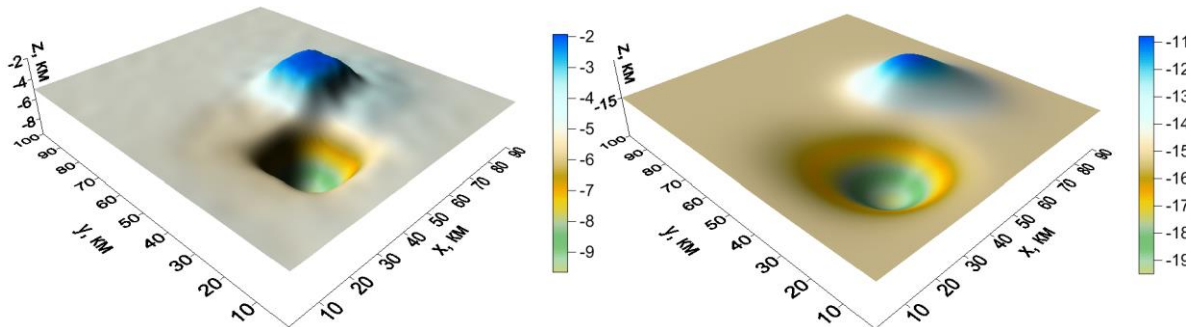
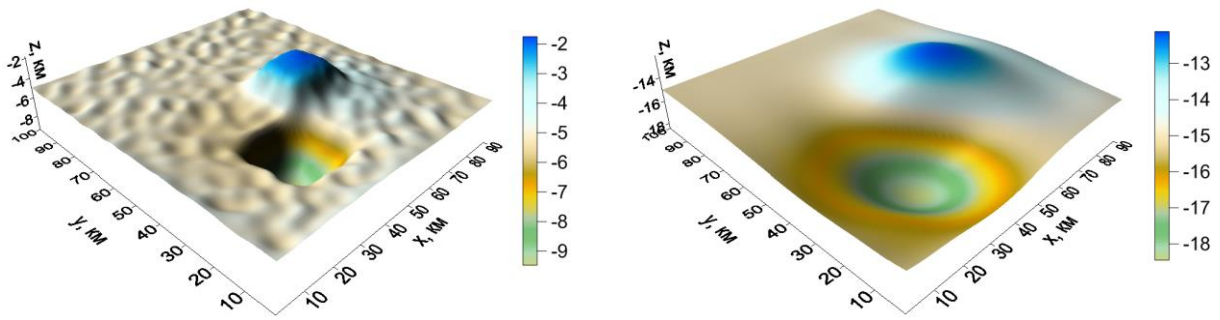


Рис. 7. Приближенные решения  $\hat{z}_1(x, y)$  и  $\hat{z}_2(x, y)$ , восстановленные по суммарному полю (с шумом)





**Рис. 8.** Приближенные решения  $\hat{z}_1(x, y)$  и  $\hat{z}_2(x, y)$ , восстановленные по выделенным полям (с шумом)

Задача решалась на вычислительных узлах суперкомпьютера «Уран»: на многоядерном процессоре Intel Xeon с применением технологии OpenMP и библиотеки Intel MKL (умножение матриц для МН по формуле (6)) и на графических процессорах NVIDIA Tesla с помощью технологии CUDA. Для Intel Xeon проведена оптимизация выполнения векторно-матричных операций опциями компилятора и векторизация циклов с помощью директивы `#pragma simd`. В результате время решения задачи уменьшилось в несколько раз.

Для модельной задачи магнитометрии проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

В табл. 1 и 2 представлены результаты решения задачи магнитометрии в трехслойной среде для модельных поверхностей «квадратная горка и впадина» и «горка и впадина» без шума и с равномерным шумом 15%. В 1-ом столбце таблиц 1 и 2 приводится метод решения задачи. При решении задачи первым способом по суммарному полю методами ЛММО и ЛМНС весовые множители  $\gamma_i$  выбирались из предварительно выделенных полей по формуле (13) с параметрами  $\beta=1.3$ ,  $\alpha=0.4$ . При решении задачи вторым способом для восстановления каждой поверхности раздела по соответствующему выделенному полю выбирались следующие параметры: для методов ЛММО и ЛМНС  $\gamma=0.1$ , для метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона  $\alpha=10^{-3}$ , для покомпонентного метода типа Ньютона  $\gamma=1.6$ .

Во 2-ом и 3-ем столбцах таблиц 1 и 2 приводятся наименьшие относительные погрешности восстановленных поверхностей  $\delta_i = \frac{\|z_i^T - z_i^{np}\|}{\|z_i^T\|}$ , где  $\delta_1$  – погрешность для  $H_1=5$  км,  $\delta_2$  – погрешность для  $H_2=15$  км, в 4 столбце таблиц – общее число итераций восстановления двух поверхностей  $N = N_1 + N_2$ , в остальных столбцах приводятся времена решения задачи.  $T_1$  – время решения на одном ядре процессора Intel Xeon,  $T_2$  – время решения на 6 ядрах Intel Xeon,  $T_3$  – время решения на GPU NVIDIA Tesla.

**Таблица 1.** Относительные погрешности и времена решения модельной задачи без шума

Задача без шума	$\delta_1$	$\delta_2$	$N_1 + N_2$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
1 способ ЛММО	0.03	0.06	70	150 сек	30 сек	9 сек
1 способ ЛМНС	0.03	0.06	60	152 сек	32 сек	10 сек
2 способ ЛММО	0.056	0.056	50+60	155 сек	50 сек	12 сек
2 способ ЛМНС	0.056	0.056	70+60	165 сек	60 сек	14 сек
2 способ МН	0.062	0.067	7+5	26 мин.	4.7 мин.	60 сек
2 способ ММН	0.049	0.053	3+5	12 сек	3 сек	0.4 сек
2 способ ПМН	0.045	0.056	4+3	7 сек	1.8 сек	0.2 сек

**Таблица 2.** Относительные погрешности и времена решения модельной задачи с шумом

Задача с шумом	$\delta_1$	$\delta_2$	$N_1 + N_2$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
1 способ ЛММО	0.04	0.06	70	150 сек	30 сек	9 сек
1 способ ЛМНС	0.04	0.06	58	150 сек	33 сек	11 сек
2 способ ЛММО	0.05	0.06	60+60	160 сек	52 сек	12 сек
2 способ ЛМНС	0.05	0.06	70+60	165 сек	58 сек	13 сек
2 способ МН	0.069	0.075	5+4	19.5 мин	4.8 мин	45 сек
2 способ ММН	0.055	0.061	6+5	15 сек	3.5 сек	0.6 сек
2 способ ПМН	0.045	0.058	4+3	7 сек	1.8 сек	0.2 сек

Численные эксперименты, выполненные для модельной задачи магнитометрии, показали, что для методов градиентного типа способ восстановления поверхностей раздела по суммарному полю по сравнению со способом восстановления каждой поверхности по выделенным полям уменьшает относительную погрешность решения и число итераций. Дополнительные погрешности, возникающие при реализации методики разделения полей [3], распределяются здесь более равномерно по обеим границам и оказывают меньшее влияние. Кроме того, данный способ более устойчив к шуму (см. рис. 7 и рис. 8).

Заметим, что методы типа Ньютона нельзя использовать для восстановления поверхностей раздела по суммарному полю в связи с несовпадением размерностей вектора правой части и расширенного вектора решения системы нелинейных уравнений (10).

Для способа восстановления поверхностей раздела по выделенным полям модифицированный метод Ньютона и покомпонентный метод типа Ньютона являются наиболее экономичными. Метод Ньютона имеет самую высокую вычислительную сложность в связи с тем, что на каждой итерации метода приходится пересчитывать матрицу СЛАУ и предварительно переходить к системе с симметричной матрицей (6). Время решения задачи методом Ньютона на одном ядре составило 26 минут, градиентными методами – 2.5 минуты, методами ММН и ПМН – менее 15 сек. Однако линейризованные методы градиентного типа и метод Ньютона является более устойчивыми к шуму по сравнению с ММН и ПМН.

Распараллеливание алгоритмов при решении обратных задач магнитометрии на многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией и GPU NVIDIA Tesla уменьшает время счета. Решение задачи на 6 ядрах Intel Xeon градиентными методами составляет менее 1 мин., методами ММН и ПМН – менее 7 сек. Решение задачи на GPU методом Ньютона занимает минуту, градиентными методами – 10 сек, а решение задачи ММН и ПМН составляет доли секунды.

## 5. Заключение

Для решения трехмерной структурной обратной задачи магнитометрии о нахождении поверхностей раздела для модели двухслойной среды предложен быстрый покомпонентный метод типа Ньютона. Для решения структурной задачи магнитометрии для модели многослойной среды предложен подход, основанный на применении регуляризованных методов градиентного типа с переменными весовыми множителями, позволяющий по суммарному полю находить из интегрального уравнения несколько структурных границ. На основе методов типа Ньютона и методов градиентного типа решения задач магнитометрии для моделей двухслойной и трехслойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящих в состав суперкомпьютера «Уран». Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах». Для модельной задачи магнитометрии проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета. Распараллеливание алгоритмов при решении обратных задач магнитометрии на многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией и графических процессорах NVIDIA Tesla уменьшает время счета.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН В.В. Васину за полезные обсуждения и внимание к работе.

## Литература

1. Малкин Н.Р. О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности (случай пластообразно залегающих масс) // ДАН СССР. Сер. А. 1931. № 9. С. 232–235.
2. Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев А.Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика земли. 2010. № 11. С. 23–35.
3. Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.
4. Bakushinsky A., Goncharsky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. London: Kluwer Akad. Publ. 1994.
5. Васин В.В. Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 85–97.
6. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН. 2005.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 8-е изд. М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2003.
8. Акимова Е.Н., Васин В.В., Мисилов В.Е. Алгоритмы решения обратных задач гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах // Труды межд. конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2013)». Челябинск: ЮУрГУ, 2013. С. 27–37.
9. Акимова Е.Н., Мартышко П.С., Мисилов В.Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // ДАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 676–679.
10. Акимова Е.Н., Белоусов Д.В., Мисилов В.Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 6. № 2. С. 107–121.