

# Методы декомпозиции для решения задач движения жидкости в пористых средах на гетерогенных вычислительных системах\*

А.В. Цапаев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук

Работа направлена на решение важных задач подземной гидромеханики - задач многофазной фильтрации жидкостей. Для решения этих задач предлагаются новые алгоритмы и методы решения, основанные на методах декомпозиции. Алгоритмы реализованы на вычислительных системах нового поколения - гетерогенных суперкомпьютерах, построенных на основе современных центральных процессоров и графических ускорителей.

## 1. Введение

Исследование процессов разработки месторождений углеводородного сырья с использованием математических моделей течений многофазной жидкости в пористых средах со скважинами является актуальной задачей. Математические модели таких процессов представляют собой системы связанных нелинейных нестационарных уравнений с частными производными. При численном решении этих систем наиболее распространенными являются вычислительные алгоритмы, основанные на тех или иных модификациях метода IMPES (неявная схема по давлению, явная по насыщенности) [1]. Как правило, методы решения задач многофазных течений в пористых средах реализованы на сетках, сгущающихся к интервалам вскрытия скважин. Требования к точности решения приводят к необходимости получать численные решения задачи на сетках, имеющих десятки миллионов неизвестных, за приемлемое время. Повышенные требования к вычислительным ресурсам обусловлены также нестационарностью и трехмерностью рассматриваемых процессов, неоднородностью физических характеристик пласта и др. Такие задачи могут быть решены только на высокопроизводительных вычислительных системах. Поэтому необходимы алгоритмы, пригодные для распараллеливания. Наиболее популярными методами решения таких задач являются методы декомпозиции, то есть разделение задачи на части, которые могут быть параллельно решены. Одним из преимуществ методов декомпозиции является возможность их реализации на многопроцессорных вычислительных системах. Идея декомпозиции использовалась и ранее, но не в связи с параллельными вычислениями, и привела к методам подструктур, подконструкций, макроэлементов, суперэлементов, фрагментов, модуль-элементов, редуцированных элементов, а также методам Шварца, матриц емкости и т.д. Такие методы всегда использовались как методы, позволяющие сводить решение исходной задачи в области со сложной границей к последовательности задач в подобластях, граница которых достаточно простая. С развитием гетерогенных вычислительных систем основной принцип разделения области решения на подзадачи сводится к независимому решению этих подзадач на различных вычислительных комплексах (ядра, процессоры, графические ускорители). Это приводит значительному уменьшению времени решения исходной задачи.

При решении задач многофазной фильтрации [2, 3] на каждом временном шаге приходится определять поля давления и насыщенности. Для решения сеточных систем уравнений по давлению и насыщенности предлагаются два различных метода декомпозиции области: один метод для решения сеточных уравнений по давлению, другой - для решения сеточных уравнений по насыщенности [4]. Метод декомпозиции области по определению поля давления основан на

---

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ "Решение задач многофазного течения в пористой среде с использованием гетерогенных вычислительных систем" N«12-01-31180»\*

независимом решении систем алгебраических уравнений для сгущающихся участков сетки в подобластях и новом типе согласования этих решений с решением на грубой сетке. Для решения уравнения по насыщенности разработан новый метод декомпозиции области, основанный на сочетании элементов явной и неявной схем. На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи трехфазной фильтрации жидкости на гетерогенных вычислительных системах. Сочетание вычислительных ядер центрального процессора и графических устройств позволило значительно сократить время решения задач. Данные методы декомпозиции применялись также при решении задач фильтрации однофазной жидкости, подчиняющейся нелинейному закону Форхгеймера [5], напорно-безнапорной фильтрации [6].

## 2. Постановка задачи трехфазной фильтрации

Рассматривается трехфазная изотермическая фильтрация нефти, воды и газа, подчиняющаяся линейному закону Дарси. Считается, что пласт, нефть и вода несжимаемы и отсутствует массообмен между нефтяной и газовой фазой. Тогда справедлива следующая система уравнений:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_w) + m\partial S_w / \partial t = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_o) + m\partial S_o / \partial t = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho_g \mathbf{q}_g) + m\partial(\rho_g S_g) / \partial t = 0, \quad (3)$$

$$q_\alpha = -(f_\alpha k / \mu_\alpha) \operatorname{grad} p, (\alpha = o, w, g). \quad (4)$$

Здесь  $p = p(x, y, z)$  – давление, индексы “o”, “w”, “g” соответствуют нефти, воде и газу,  $\mathbf{q}_\alpha$  – вектор скорости фильтрации фазы  $\alpha$ ,  $S_\alpha$  – насыщенность пласта фазой  $\alpha$ ,  $S_o + S_w + S_g = 1$ ,  $f_\alpha$ , – относительные фазовые проницаемости,  $k$  – абсолютная проницаемость,  $\mu_\alpha$  – динамическая вязкость фазы,  $\rho_g = \rho_g^* / B_g$  – плотность газа в пластовых условиях,  $\rho_g^*$  – плотность газа при нормальных условиях,  $B_g$  – объемный коэффициент,  $m$  – пористость. Суммируя уравнения (1)-(3) с учетом (4) получим уравнение для давления

$$(mS_g(\rho_g)_p' / \rho_g) \partial p / \partial t - \operatorname{div}((K_o + K_w + K_g) \operatorname{grad} p) = 0, \quad (5)$$

где  $K_\alpha = f_\alpha k / \mu_\alpha$ , ( $\alpha = o, w, g$ ) – фазовые подвижности.

Область решения представляется многосвязной областью, внутренние поверхности которой определены поверхностями скважин в интервалах вскрытия пласта. В начальный момент времени считаются известными распределения давления и насыщенностей в пласте. На внешней поверхности пласта задаются граничные условия 1-го или 2-го рода. Обычно это начальное пластовое давление, условие непротекания и насыщенности пласта фазами на участках внешней поверхности, через которые поступают флюиды. На скважинах задается либо забойное давление, либо суммарный расход жидкости при некотором фиксированном давлении, определяемом в процессе решения задачи.

## 3. Решение задачи методами декомпозиции области

Задача решается в области  $D$ , представляющей собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Объединение  $\bigcup_{k=1}^N V_k$  является дополнением многосвязной области  $D$  до односвязной области. Система уравнений трехфазной фильтрации без учета капиллярных и гравитационных сил записывается в виде (1)-(4) при граничных условиях

$$p = p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1, \quad (6)$$

$$-(K_o + K_w + K_g) \partial p / \partial n = q_n \text{ на } \Gamma_2, \quad (7)$$

$$p|_{\partial V_k} = P_k, k = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$S_w = S_{w_\Gamma} \text{ на } \Gamma_3, S_w = S_{w_k}, k = 1, \dots, M \quad (9)$$

и начальных условиях

$$p = P^0, S_w = S_w^0, S_o = S_o^0 \text{ в } D, \quad (10)$$

где  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$  - внешняя граничная поверхность области  $D$ ,  $\Gamma_3$  - часть поверхности  $\Gamma$ , через которую жидкость поступает в пласт,  $\partial V_k$  - поверхность интервала вскрытия пласта  $k$ -ой скважиной,  $P_k$  - заданное давление на  $k$ -ой скважине,  $N$  - число скважин,  $M$  - число нагнетающих скважин ( $M < N$ ),  $S_{w_k}$  - заданная насыщенность в нагнетательной скважине. Для области  $D$  введем следующие соотношения:  $\bar{D} = \bar{D}_0 \cup (\bigcup_{k=1}^N \bar{D}_k)$ ,  $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$ ,  $\bar{D}_0 \cap \bar{D}_k = \gamma_k$ ,  $S_k \cap \gamma_k = \emptyset$ , где  $D_k$  - прискважинные подобласти,  $S_k$  - суммарная поверхность интервалов вскрытия  $k$ -ой скважины. Пласт покрыт сеткой  $\Omega$ , ячейки которой в прискважинных зонах  $D_k$  уменьшаются в размерах к интервалам вскрытия скважин по убывающей геометрической прогрессии. Для определения  $S_w$  и  $S_o$  на  $(n+1)$ -ом временном шаге необходимо выполнить следующие этапы [7].

Этап 1. Вычисляются давления  $p_i^{n+1}$  из системы (5)-(8),(10) со значениями  $K_{oi}^n, K_{wi}^n, K_{gi}^n$ . Для решения задачи (5)-(8),(10) предлагается следующий метод декомпозиции. Вводятся дополнительные грубые сетки  $\omega_k$ , покрывающие области  $D_k \cup V_k$  и имеющие размер ячеек, эквивалентный размеру ячеек  $\Omega$  в  $D_0$ . Решение  $p$  в области  $D_0$  представляется как  $p_1$  с граничными условиями  $p_1 = p_{1\gamma_k}$  на границах раздела  $\gamma_k$  области  $D_0$  и прискважинных подобластей  $D_k$ , а вне области  $D_0$  как сумму двух решений  $p_{2k}$  и  $p_{3k}$ . Решения  $p_{2k}$  определяются на сетке  $\Omega$  в областях  $D_k$ , а решения  $p_{3k}$  на сетках  $\omega_k$  в областях  $D_k \cup V_k$ , при этом  $p_{1\gamma_k} = p_{2\gamma_k} + p_{3\gamma_k}$  на границах  $\gamma_k$ .

Постановка задачи для определения  $p_1$  на сетке  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} (mS_g(\rho_g)'_p / \rho_g) \partial p_1 / \partial t - \text{div}(K_w + K_o + K_g) \text{grad } p_1 &= 0 \text{ в } D_0, \\ p_1 &= p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1 \cap D_0, \\ -(K_w + K_o + K_g) \partial p_1 / \partial n &= q_n \text{ на } \Gamma_2 \cap D_0, \\ p_1 &= p_{1\gamma_k} \text{ на } \gamma_k, k = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (11)$$

Постановка задачи для определения  $p_{2k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на сетке  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} (mS_g(\rho_g)'_p / \rho_g) \partial p_{2k} / \partial t - \text{div}(K_w + K_o + K_g) \text{grad } p_{2k} &= 0 \text{ в } D_k, \\ p_{2k} &= p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1 \cap D_k, \\ -(K_w + K_o + K_g) \partial p_{2k} / \partial n &= q_n \text{ на } \Gamma_2 \cap D_k, \\ p_{2k} |_{\partial V_k} &= P_k, \\ p_{2k} &= p_{2\gamma_k} \text{ на } \gamma_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Постановка задачи для определения  $p_{3k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на сетке  $\omega_k$ :

$$\begin{aligned} (mS_g(\rho_g)'_p / \rho_g) \partial p_{3k} / \partial t - \text{div}(K_w + K_o + K_g) \text{grad } p_{3k} &= 0 \text{ в } D_k \cup V_k, \\ p_{3k} &= 0 \text{ на } \Gamma_1 \cap (D_k \cup V_k) \\ p_{3k} &= p_{3\gamma_k} \text{ на } \gamma_k. \end{aligned} \quad (13)$$

Решения  $p_1$ ,  $p_{2k}$  и  $p_{3k}$  при известных граничных значениях  $p_{\Gamma_{1k}}$ ,  $p_{\Gamma_{2k}}$ ,  $p_{\Gamma_{3k}}$  независимо определяются из систем уравнений (11), (12) и (13) соответственно. При выполнении условий

на границах раздела  $\gamma_k$  относительно давлений  $p_{\Gamma_k} = p_{\Gamma_{2k}} + p_{\Gamma_{3k}}$  и относительно нормальных составляющих скоростей фильтрации  $q_{1kn} + q_{2kn} + q_{3kn} = 0$  для определения решений  $p_1, p_{2k}, p_{3k}$  достаточно задания начальных условий и граничных значений  $p_{\Gamma_{3k}}$ . При значениях  $p_{\Gamma_{3k}} = 0$  система уравнений (11)-(13) эквивалентна исходной системе уравнений (5)-(8),(10). Таким образом, для получения решения исходной системы уравнений необходимо построить алгоритм решения системы (11)-(13), в котором  $p_{3k} \rightarrow 0$ .

На каждой итерации  $i \geq 1$  независимо определяются  $p_{2k}^i$  из решения задач (12) с граничными значениями на  $\gamma_k$

$$p_{2\gamma k}^i = p_{2\gamma k}^{i-1} + p_{3\gamma k}^{i-1}, \quad (14)$$

где  $p_{2\gamma k}^0, p_{3\gamma k}^0$  берутся с предыдущего временного шага. Для определения  $p_1^i$ , и  $p_{3k}^i$  совместно решаются системы уравнений (11), (13) на грубой сетке с дополнительными условиями  $p_{\Gamma_{1k}}^i - p_{\Gamma_{3k}}^i = p_{\Gamma_{2k}}^i$  и  $q_{1kn}^i + q_{3kn}^i = -q_{2kn}^i$  на  $\gamma_k$  при фиксированных узловых значениях решений  $p_{2k}^i$ . В вычислительном процессе, построенном таким образом, граничные значения  $p_{3\gamma k}^i$  сносятся после каждой итерации по правилу (14) на граничные значения  $p_{2\gamma k}^i$ . В результате  $p_{3k}^i$  с ростом  $i$  стремятся к нулю, и  $i$ -ое приближение давления определяется решением  $p_1^i$  в области  $D_0$  и решениями  $p_{2k}^i$  в подобластях  $D_k$ .

Этап 2. Вычисляются полные расходы, выходящие из ячеек грубой сетки в единицу времени

$$Q_{j,i}^{n+1} = (p_j^{n+1} - p_i^{n+1}) / R_{i,j}^n, \quad (15)$$

где  $R_{i,j}^n = L_{i,j} / D_{i,j} (K_{wi}^n + K_{oi}^n + K_{gi}^n) + L_{j,i} / D_{i,j} (K_{wj}^n + K_{oj}^n + K_{gj}^n)$ ,  $D_{i,j}$  - площадь общей граничной поверхности  $i$ -ой и  $j$ -ой ячеек,  $L_{i,j}$  - расстояние от узлового значения  $i$ -ой ячейки до общей граничной поверхности,  $p_i^{n+1}$  - давление в  $i$ -ой ячейке.

Этап 3. Для полных расходов, выходящих из ячеек грубой сетки, вычисляются фазовые расходы по явной схеме для воды и нефти соответственно

$$Q_{wj,i}^{n+1,y} = (K_w^n / (K_w^n + K_o^n + K_g^n))_{j,i}^{up} Q_{j,i}^{n+1},$$

$$Q_{oj,i}^{n+1,y} = (K_o^n / (K_w^n + K_o^n + K_g^n))_{j,i}^{up} Q_{j,i}^{n+1}$$

где  $(K_w^n / (K_w^n + K_o^n + K_g^n))_{j,i}^{up} = \begin{cases} (K_{wi}^n / (K_{wi}^n + K_{oi}^n + K_{gi}^n)), & p_i \geq p_j, \\ (K_{wj}^n / (K_{wj}^n + K_{oj}^n + K_{gj}^n)), & p_i < p_j. \end{cases}$

$(K_o^n / (K_w^n + K_o^n + K_g^n))_{j,i}^{up} = \begin{cases} (K_{oi}^n / (K_{wi}^n + K_{oi}^n + K_{gi}^n)), & p_i \geq p_j, \\ (K_{oj}^n / (K_{wj}^n + K_{oj}^n + K_{gj}^n)), & p_i < p_j. \end{cases}$

Этап 4. Для каждой прискважинной зоны независимо вычисляются насыщенности по неявной схеме из системы уравнений

$$m_i V_i (S_{wi}^{n+1} - S_{wi}^n) / \Delta t = \sum_j Q_{wj,i}^{n+1}, \quad (16)$$

$$m_i V_i (S_{oi}^{n+1} - S_{oi}^n) / \Delta t = \sum_j Q_{oj,i}^{n+1}, \quad (17)$$

где сумма берется по  $j$ -ым ячейкам, окружающим  $i$ -ую ячейку,  $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,y}$ ,  $Q_{oj,i}^{n+1} = Q_{oj,i}^{n+1,y}$  для  $j$ -ых ячеек грубой сетки, из которых расход поступает в прискважинную зону,

$$Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,ня} = (K_w^{n+1} / (K_w^{n+1} + K_o^{n+1} + K_g^{n+1}))_{j,i}^{up} Q_{j,i}^{n+1},$$

$$Q_{oj,i}^{n+1} = Q_{oj,i}^{n+1,ня} = (K_o^{n+1} / (K_w^{n+1} + K_o^{n+1} + K_g^{n+1}))_{j,i}^{up} Q_{j,i}^{n+1}$$

в остальных случаях. Фазовые расходы  $Q_{wj,i}^{n+1,я}$ ,  $Q_{oj,i}^{n+1,я}$  являются граничными условиями при решении систем (16)-(17).

Этап 5. Вычисляются насыщенности для ячеек грубой сетки

$$S_{wi}^{n+1} = S_{wi}^n + (\Delta t / m_i V_i) \sum_j Q_{wj,i}^{n+1},$$

$$S_{oi}^{n+1} = S_{oi}^n + (\Delta t / m_i V_i) \sum_j Q_{oj,i}^{n+1}$$

где  $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,ня}$ ,  $Q_{oj,i}^{n+1} = Q_{oj,i}^{n+1,ня}$  берутся из решения системы уравнений (16)-(17) для j-ых ячеек прискважинных зон, из которых расход поступает в ячейки грубой сетки,  $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,я}$ ,

$Q_{oj,i}^{n+1} = Q_{oj,i}^{n+1,я}$  в остальных случаях.

#### 4. Численные эксперименты

Предложенный алгоритм тестировался при решении модельной трехмерной задачи трехфазной фильтрации жидкостей с различным числом вертикальных добывающих и нагнетающих скважин. Рассматривался десятислойный пласт ( $\approx 1\text{км} \times 1\text{км} \times 0.018\text{км}$ ) с толщинами слоев  $d_1 = 1\text{ м}$ ,  $d_2 = 1\text{ м}$ ,  $d_3 = 3\text{ м}$ ,  $d_4 = 1\text{ м}$ ,  $d_5 = 1\text{ м}$ ,  $d_6 = 1\text{ м}$ ,  $d_7 = 2\text{ м}$ ,  $d_8 = 1\text{ м}$ ,  $d_9 = 2\text{ м}$ ,  $d_{10} = 5\text{ м}$  и абсолютными проницаемостями  $k_1 = 10^{-3}$  дарси,  $k_2 = 10^{-2}$  дарси,  $k_3 = 25 \times 10^{-3}$  дарси,  $k_4 = 10^{-2}$  дарси,  $k_5 = 10^{-3}$  дарси,  $k_6 = 10^{-2}$  дарси,  $k_7 = 5 \times 10^{-2}$  дарси,  $k_8 = 10^{-2}$  дарси,  $k_9 = 10^{-3}$  дарси,  $k_{10} = 15 \times 10^{-3}$  дарси соответственно. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях и подошве пласта давление  $P_\Gamma = 125$  атм, на скважинах  $P_\kappa = 30$  атм, на боковой поверхности насыщенность  $S_w = 0$ , на подошве  $S_w = 1$ . Начальная насыщенность  $S_w = 0$  за исключением зоны  $\Gamma_g$  (содержание газа в пласте), расположенной в центре пласта у кровли, в которой  $S_w = 0$ ,  $S_o = 0$ ,  $S_g = 1$ . Динамическая вязкость воды -  $\mu_w = 1\text{мПа} \cdot \text{с}$ , динамическая вязкость нефти -  $\mu_o = 15\text{мПа} \cdot \text{с}$ , плотность нефти  $\rho_o = 0.882\text{г} / \text{см}^3$ , плотность воды  $\rho_w = 1\text{г} / \text{см}^3$ . Относительные фазовые проницаемости брались линейными функциями от насыщенностей. Каждый интервал вскрытия моделировался круговым цилиндром с радиусом основания  $r=0,1$  м и замыкался сверху и снизу сферическими поверхностями радиуса  $r=0,1$  м. Таким образом, для каждой точки поверхности интервалов вскрытия вектор нормали определен однозначно. Ячейки, примыкающие к скважинам, имели размеры как в горизонтальной плоскости, так и по высоте, порядка 0,1 м.

На основе предложенных методов построены алгоритмы для решения задачи на суперкомпьютерах с большим числом вычислительных ядер и с большим числом графических процессоров. Алгоритмы распараллелены с помощью MPI процессов, OpenMP и CUDA технологий. Использовался язык C++ и среда разработки приложений Visual Studio 2008. При решении задачи для каждого MPI процесса выделяется равное число сгущающихся участков сетки. Для решения задач на сгущающихся участках, соответствующих одному MPI процессу, порождаются потоки с помощью технологии OpenMP, которые распределяют эти задачи на ядра процессора и на графические устройства. При этом задачи распределяются динамически, то есть по мере их решения. Вычисления на графическом устройстве включают в себя:

1. Построение систем уравнений для определения поля давления и насыщенности.
2. Решение линейных систем уравнений для определения поля давления с помощью библиотек cublas и cusparse.
3. Решение нелинейных систем уравнений для определения поля насыщенности в прискважинной зоне по неявной схеме методом Ньютона.
4. определение поля насыщенности по явным схемам для ячеек внескважинной зоны.

Предложенные алгоритмы тестировались на кластере, состоящем из 4-ядерных вычислительных узлов с процессорами Intel Core i7 2600 и оборудованными графическими ускорителями компании NVidia GTX 560 TI, при решении модельной трехмерной задачи трехфазной фильтрации жидкости с вертикальными добывающими и нагнетающими скважинами. Каждая прискважинная зона содержала около 25000 узлов, внескважинная зона около 6000 узлов. Общее число узлов для 200 сгущающихся участков достигало 5000000. Системы линейных уравнений для определения поля давления решались методом сопряженных градиентов с полиномиальным предобуславливанием. Системы нелинейных уравнений для определения поля насыщенностей прискважинной зоны решались по неявной схеме методом Ньютона.

Задача решалась на 2-х вычислительных узлах с общим числом ядер 8(4 ядра на узел) и 2 GPU ускорителя. Задачи запускались в режиме 1 MPI процесс на один узел, каждому MPI процессу соответствовало 1 GPU устройство. Рассматривались следующие варианты запуска задач:

1. На всех доступных ядрах с использованием одного MPI процесса и без использования GPU ускорителей.
2. На двух ядрах с использованием двух MPI процессов и двух GPU устройств. В этом случае каждому MPI процессу соответствовало одно GPU устройство и одно ядро.
3. На всех доступных ядрах с использованием MPI процессов и GPU устройств. В этом случае использовались все доступные ресурсы кластера (2 GPU устройства и 8 ядер).

В **Табл. 1-3** приведены результаты решения. Сравнение проводилось с решением задачи на одном ядре без использования GPU устройств.

**Таблица 1** (вариант 1)

Число ядер	1	2	3	4
Ускорение	1	1.7	2.1	2.9

**Таблица 2** (вариант 2)

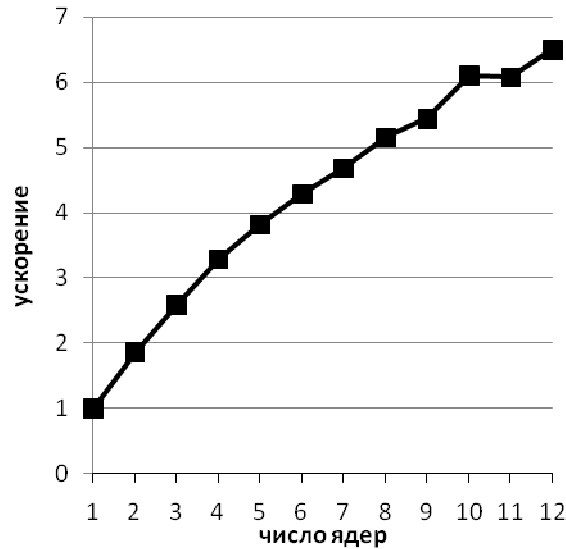
Число GPU устройств	1 GPU	2 GPU
Ускорение	17.3	30.1

**Таблица 3** (вариант 3)

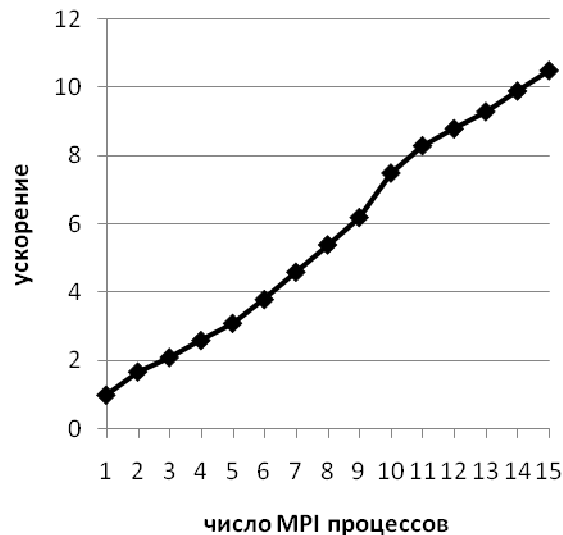
Число GPU устройств	1 GPU	2 GPU
Ускорение	20.2	36.3

В Табл. 1 показано ускорение времени решения задачи, при использовании ядер только одного вычислительного узла. Эффективность использования ядер достигает 72%. Эффективность использования GPU устройств рассчитывается из Табл 2. и достигает 80%.

Также, предложенными методами решалась задача, в которой область  $\Gamma_g$  (содержание газа в пласте) предполагалась пустой, т. е. фактически рассматривалась двухфазная фильтрация[8]. Задача решалась на суперкомпьютере "GraphIT!" Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ имени М.В.Ломоносова. На момент запуска задачи на суперкомпьютере "GraphIT!" было доступно 5 вычислительных узлов с общим числом ядер 60(12 ядер на узел) и 15 GPU ускорителей. Также, как и в предыдущем примере, рассматривались 3 варианта запуска задач. На **Рис. 1-3** приведены результаты решения.

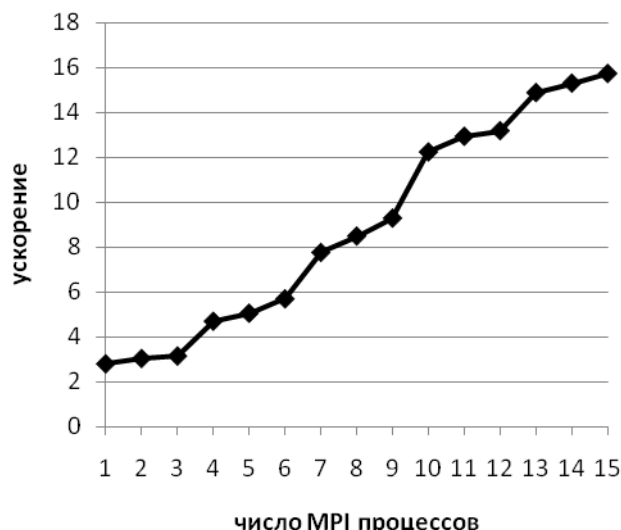


**Рис. 1.** Ускорение времени решения задачи на одном узле в зависимости от числа ядер (1 вариант).



**Рис. 2.** Ускорение времени решения задачи в зависимости от числа MPI процессов(2 вариант).

На Рис. 1 приведено ускорение времени решения задачи в зависимости от числа ядер, в случае запуска задачи на одном узле с одним MPI процессом и без использования GPU устройств (1 вариант). Сравнение проводилось с решением на 1 ядре и без использования GPU устройств. Из рисунка видно, что получено 7-кратное ускорение на 12 ядрах (эффективность 60%). На Рис. 2 приведено ускорение времени решения задачи в зависимости от числа MPI процессов, в случае запуска задачи с использованием различного числа GPU процессоров и выделением 1 ядра для каждого MPI процесса(2 вариант). Сравнение проводилось с результатом решения на 1 ядре и 1 GPU устройстве. Показана эффективность 70% при решении на 15 GPU процессоров.



**Рис. 3.** Ускорение времени решения задачи в зависимости от числа MPI процессов (3 вариант).

На Рис. 3 приведено ускорение времени решения в случае запуска задач с различным числом MPI процессов и GPU процессоров (вариант 3), при этом использовались все доступные ядра узлов на которых запускались MPI процессы. Сравнение проводилось со временем решения задачи на 1 GPU процессоре и 1 ядре. Отметим, что если сравнивать решение на 1 ядре без MPI процессов и GPU процессоров с решением задачи с использованием всех доступных вычислительных устройств суперкомпьютера, то ускорение достигало 120 раз.

## 5. Выводы

Построены алгоритмы для решения задачи трехфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками, основанные на методах декомпозиции области. Декомпозиция сеточной системы уравнений по давлению основана на согласовании решений для сгущающихся участков с решением на грубой сетке за счет введения дополнительных грубых сеток. Декомпозиция сеточной системы уравнений по насыщенности основана на независимом решении уравнений на сгущающихся участках по неявным схемам и на согласовании этих решений с решением на грубой сетке с использованием элементов явной и неявной схем. На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи на гетерогенных вычислительных системах. Показана высокая эффективность использования многопроцессорных систем, построенных на базе графических процессоров.

## Литература

1. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. SIAM, 2006.
2. Басниев К. С., Власов А.М., Кочина И.М., Максимов В.М. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986, 303 с.
3. Азис Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982, 407 с.
4. Мазуров П.А., Цепаев А.В. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками. // Вычислительные методы и программирование. 2006, Т.7, №2, С. 115–123.
5. Мазуров П.А., Цепаев А.В. Метод решения нелинейных задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами. // Математическое мо-



делирование. 2004, Т.16, №3, С. 33-42.

6. Губайдуллин Д.А., Мазуров П.А., Цапаев А.В. Алгоритм решения трехмерных задач напорно-безнапорной стационарной фильтрации жидкости со сгущающимися участками сетки. // Вычислительные методы и программирование. 2005, Т.6, №2, С. 217 - 225.

7. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Цапаев А.В. Алгоритмы распараллеливания на сгущающихся сетках в задачах трехфазной фильтрации жидкости. // Вычислительные методы и программирование. - 2007. - Т.8. - №2. - С. 360 - 366.

8. Цапаев А. В. Использование гетерогенных вычислительных систем для решения задач фильтрации жидкости методами декомпозиции области. // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. № 1. 39-44.