

О численном исследовании ламинарно-турбулентного перехода с использованием различных параллельных архитектур

Н.М. Евстигнеев, О.И. Рябков

Институт Системного Анализа Российской Академии Наук

В работе построен численный метод решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой среды высокого порядка аппроксимации, позволяющий разрешать нестационарные аттракторы, возникающие в системе при изменении числа Рейнольдса. Были реализованы два варианта метода: MPI и CUDA. Использование GPU Tesla C1060 дает четырехкратное ускорение по сравнению с использованием восьми ядер Intel Xenon. Также было реализовано обобщение метода для решения задач несжимаемой МГД среды, но только для MPI-совместимых архитектур. При решении последней задачи среди прочих был использован вычислительный комплекс IBM Blue Gene/P факультета ВМК МГУ.

1. Введение

Вопрос о том, что представляет собой турбулентное течение жидкости, и как происходит ламинарно-турбулентный переход, был поставлен еще до появления мощных ЭВМ. Различные варианты (сценарии) были предложены физиками еще в середине XX века. Например, сценарий Ландау-Хопфа [4]. Насколько нам известно, прямое численное моделирование для разрешения данной задачи не применялось до работы [9]. Поводом для проведения подобного численного эксперимента послужила серия работ [5], выявившая некий универсальный сценарий перехода к хаосу в различных малоразмерных динамических системах, и предположение о том, что в задаче ламинарно-турбулентного перехода может реализовываться аналогичный сценарий. Данная работа является прямым продолжением указанной серии работ.

2. Постановка задачи

В работе исследовалась начально-краевая задача (НКЗ) для уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости [2]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \nabla P = \frac{1}{R} \nabla^2 V + \frac{1}{Fr} \text{ в } Q = \Omega \times (0, t), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \text{ в } Q, \quad (2)$$

$$V = f(\vec{x}), \text{ на } \partial\Omega_0 \times (0, t), \quad V = 0, \text{ на } \partial\Omega_1 \times (0, t), \quad \frac{\partial V}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ на } \partial\Omega_2 \times (0, t), \quad (3)$$

$$V(\vec{x}, 0) = V_0(x, y, z), \text{ на } \Omega \text{ при } \nabla \cdot V_0(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Область расчета Ω представляет собой канал прямоугольного сечения разбитый на две части. Область стыка двух частей канала формирует ступеньку по одной из выбранных осей. Торцевые части канала задаются как входные и выходные граничные условия.

Целью работы было определение начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) [4,5,9] для данной НКЗ в терминах бифуркаций решений данной системы уравнений.

Также исследовалась НКЗ МГД течения в каверне [3]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V - \frac{N}{R_m} (B \cdot \nabla)B + \nabla P = \frac{1}{R} \nabla^2 V \text{ в } Q = \Omega \times (0, t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - (B \cdot \nabla)V + (V \cdot \nabla)B = \frac{1}{R_m} \nabla^2 B \text{ в } Q, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \text{ в } Q, \nabla \cdot B = 0 \text{ в } Q, \quad (7)$$

$$V = f(\vec{x}), \text{ на } \partial\Omega_0 \times (0, t), V = 0, \text{ на } \partial\Omega_1 \times (0, t), \quad (8)$$

$$V(\vec{x}, 0) = V_0(x, y, z), \text{ на } \Omega \text{ при } \nabla \cdot V_0(x, y, z) = 0. \quad (9)$$

$$B = f(\vec{x}), \text{ на } \partial\Omega_0 \times (0, t), \quad (10)$$

$$B(\vec{x}, 0) = B_0(x, y, z), \text{ на } \Omega \text{ при } \nabla \cdot B_0(x, y, z) = 0. \quad (11)$$

Область расчета Ω данной НКЗ представляет собой двумерный прямоугольник с равными сторонами, причем на одной из них задано условие Дирихле на скорость («движущаяся крышка»), а на остальных условие «прилипания», соответствующие твердой стенке. Вдоль всех границ задано условие Дирихле на магнитное поле, соответствующее приложенному внешнему магнитному полю (величины внешнего поля и скорости течения вдоль крышки равны 1).

3. Численный метод и реализация

Для решения НКЗ (1)-(4) использовались два метода: PISO и проекционный метод.

Полный цикл расчета для всех проекционных методов основан на следующей полудискретной схеме метода расщепления по физическим процессам:

$$\left. \begin{array}{l} 1. V' - V^n = -\delta t (V^n \cdot \nabla) V^n \\ 2. \tilde{V} - V' = \delta t \cdot R^{-1} \nabla^2 \tilde{V}^\sigma \\ \text{while } \nabla \cdot V^{n+1} \neq 0; \left\{ \begin{array}{l} 3. \nabla^2 P = -\delta \cdot \tilde{V}^\beta / \Delta t \\ 4. V^{\beta+1} = \tilde{V} - \delta t \nabla P \end{array} \right. \\ 5. V^{n+1} = V^{\beta+1} \end{array} \right\} \quad (12)$$

В использованной в работе схеме применялся неявный метод Рунге-Кутты 4-ого порядка аппроксимации. Диффузионный член аппроксимировался методом конечных разностей шестого порядка, конвективный член – методом WENO5 [11]. Решение уравнения Пуассона, а также аппроксимация градиента давления были выполнены методом конечных элементов. Схема PISO была реализована в качестве контрольного метода для сравнения результатов, получаемых при разных методах аппроксимации уравнений.

Решение НКЗ (5)-(11) производилось аналогичным проекционным методом (см. [7,8]). Конвективная часть для переменных V и B аппроксимировалась совместно, путем перехода к характеристическим переменным. Также в схеме был реализован метод коррекции дивергенции магнитного поля, необходимый для устранения численного магнитного монополя. Данная процедура была реализована аналогично процедуре коррекции дивергенции давления, но для аппроксимации градиента давления и дивергенции поля B использовались центральные разности, а в качестве дискретного оператора Лапласа бралась композиция указанных дискретных операторов дивергенции и градиента. Для дискретизации по времени использовалась полностью явная схема Рунге-Кутты 3-его порядка аппроксимации.

Описанная выше схема для НКЗ (1)-(4) была реализована в двух вариантах: для MPI-совместимых архитектур и с использованием архитектуры CUDA (в обоих случаях использовался язык программирования C++). Результаты тестирования показали, что использование GPU Tesla C1060 дает четырехкратное ускорение по сравнению с использованием восьми ядер Intel Xenon.

НКЗ (5)-(11) была реализована только для MPI-совместимых архитектур. Решение дискретного уравнения Пуассона проводилось двумя методами: итерационным с применением

multilevel преобуславливателя и методом быстрого преобразования Фурье (использовалась библиотека FFTW). Расчет проводился на кластере с 8 процессорами Intel Xeon и на вычислительном комплексе IBM BlueGene/P факультета ВМК МГУ. Размер расчетной сетки (192x192 и 256x256) не позволил применять метод Фурье на системе BlueGene (в силу очень большого минимального количества запускаемых MPI-процессов в данной архитектуре). В результате скорость расчета в системе BlueGene/P была всего в два раза больше, чем при использовании указанного кластера. Данный факт объясняется тем, что описанная задача (в силу своей двухмерности) является слишком маленькой для такой системы как BlueGene/P. В дальнейшем нами предполагается использовать эту систему для решения более трудоемких (например, трехмерных) задач.

4. Анализ результатов моделирования

4.1 Гидродинамическое течение с уступа

Для получения данных по времени и проведения анализа требовалась запись данных из точек внутри расчетной области в течении длительного времени для функций V_x, V_y, V_z . На рисунках 1-3 эти переменных обозначены как U, V, W соответственно. Поскольку хранение данных для всей расчетной области за промежуток времени достаточный для статистического анализа невозможен ввиду отсутствия такого количества дискового пространства (для одной серии расчета, т.е. для фиксированного числа Рейнольдса требуется около 6,43 терабайта), в области расчета были выбраны несколько точек, и на основе этих точек проводился дальнейший анализ. Для этого было выбрано пять точек внутри Ω с декартовыми координатами: $p1=\{0.1 \ 0.5 \ 0.5\}$; $p2=\{0.2 \ 0.5 \ 0.5\}$; $p3=\{0.5 \ 0.5 \ 0.5\}$; $p4=\{0.7 \ 0.5 \ 0.5\}$; $p5=\{0.8 \ 0.1 \ 0.1\}$ в относительных величинах к полным длинам по каждому направлению. По результатам полученных данных строились трехмерные подпространства бесконечномерного (в дальнейшем бесконечномерным считается конечномерное фазовое пространство, порожденное численным решением, размерность которого равна или больше размерности возникающего в системе (1)-(4) аттрактора при данном числе R) фазового пространства в координатах составляющих вектор-функции скорости $\Theta=\{V_x, V_y, V_z\}$. Бифуркационным параметром системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) выступает число Рейнольдса R .

При увеличении числа Рейнольдса со 100 до 736 течение остается ламинарным с формированием стационарных рециркуляционных зон. При этом стационарному решению соответствует устойчивая точка в бесконечномерном фазовом пространстве и, соответственно, во всех ее подпространствах, включая трехмерное подпространство вектор-функций скоростей. Начиная с $R = 737$ в системе наблюдается периодическое решение с одной частотой. В Θ из каждой устойчивой неподвижной точки рождается свой устойчивый предельный цикл, что соответствует рождению цикла из неподвижной точки в бесконечномерном фазовом пространстве задачи н.к.з. для уравнений Навье-Стокса. Установлено что при увеличении числа до $R = 850$ цикл теряет устойчивость, порождая двумерный инвариантный тор как $T^2 = C_1 \otimes C_2$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа. На рисунке 1 показаны проекции фазового пространства в точке $p4$ при $R = 849$ (цикл) и $R = 850$ (тор). При этом важно отметить, что этот тор находится во всем бесконечномерном пространстве, т.е. тор обнаруживается во всех пробных точках P_i . Это связано, скорее всего, с условием несжимаемости, поскольку все возмущения передаются одновременно во все стороны через градиент давления. Так точное значение параметра бифуркации R можно установить из анализа фазовых портретов в разных точках на уровне порогового числа.

Дальнейшее увеличение бифуркационного параметра приводит к значительному усложнению формы инвариантного двухмерного тора, наблюдаемого в системе.

Начиная с $R = 883$ во всех точках инвариантный двумерный тор теряет устойчивость и через бифуркацию Андронова-Хопфа переходит в тор большей размерности – в трехмерный инвариантный тор представляющей собой топологическое произведение трех циклов некрат-

ных частот $T^3 = C_1 \otimes C_2 \otimes C_3$. Проекцию трехмерного тора в трехмерные фазовые пространства видно на рис.2-3 для $R \leq 883$.

Для анализа получаемого трехмерного тора необходимо провести еще одно сечение плоскостью, например, $W = 0.0$. Выяснение дальнейшего усложнения трехмерного тора при увеличении числа Рейнольдса потребовало значительного количества данных. Уже при $R = 883.8$ трехмерный инвариантный тор теряет устойчивость и через бифуркацию удвоения периода переходит в трехмерный тор удвоенного периода. На рисунках 4-5 изображены: первое сечение (слева) и вспомогательное сечение (справа). Сечение на рисунке 4 соответствует простому трехмерному тору, а на рисунке 5 – удвоенному. Для получения достоверных данных потребовалось два года расчетов и 373Гб данных на одну точку.

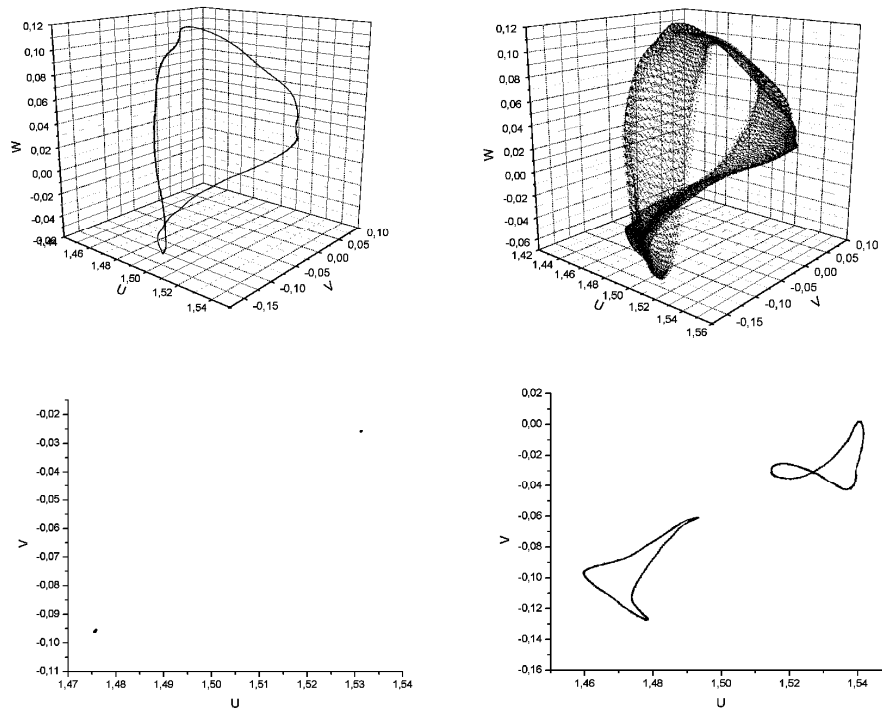


Рис. 1. $R = 849$ слева: сверху фазовое подпространство $\Theta(P_4)$, снизу сечение плоскостью $\{V_x; V_y; 1/2(W_{\max} + W_{\min})\}$; $R = 850$ справа: сверху фазовое подпространство $\Theta(P_4)$, снизу сечение плоскостью $\{V_x; V_y; 1/2(W_{\max} + W_{\min})\}$.

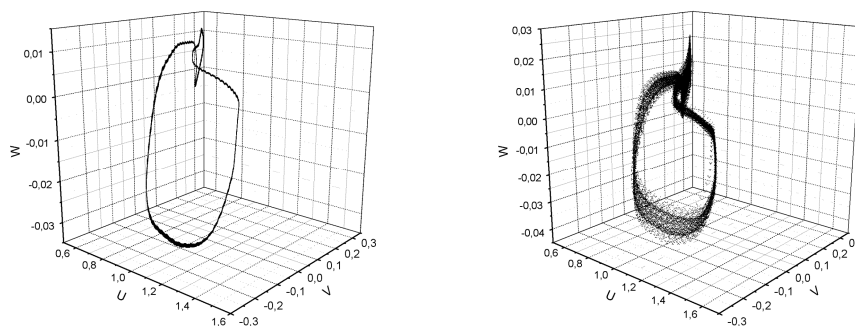


Рис. 2. $R = 850$ слева: фазовое подпространство $\Theta(P_1)$; $R = 851$ справа: фазовое подпространство $\Theta(P_1)$.

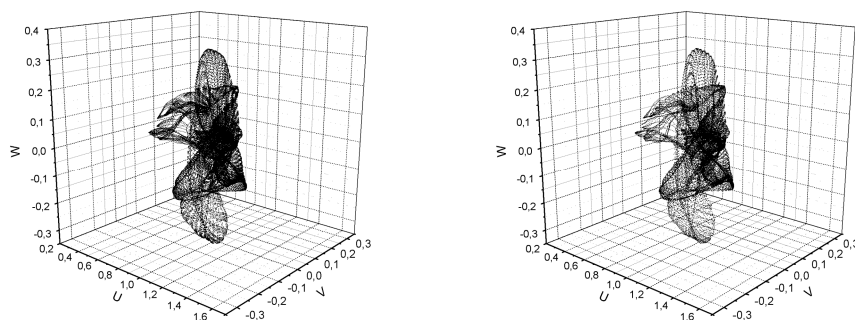


Рис. 3. $R = 882.5$ слева: фазовое подпространство $\Theta(P_1)$; $R = 883$ справа: фазовое подпространство $\Theta(P_1)$.

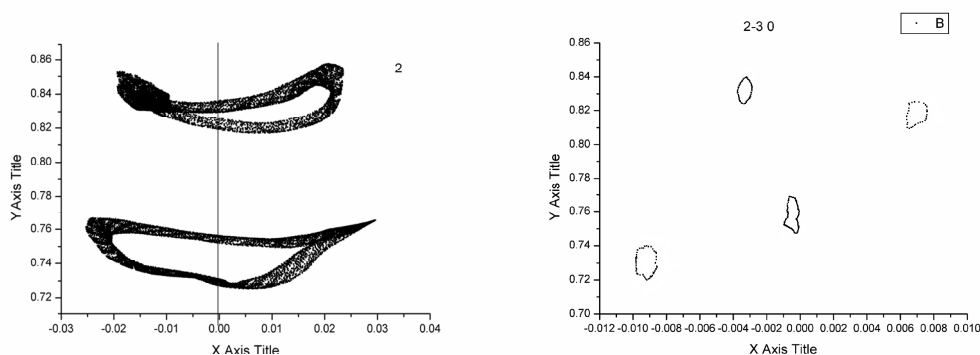


Рис.4. Точка P3. $R = 883$, слева сечение трехмерного подпространства Θ плоскостью $\{1/2(U_{\max} + U_{\min}); V_y; V_z\}$; слева – сечение в дополнительной плоскости, $\{W = 0.0\}$.

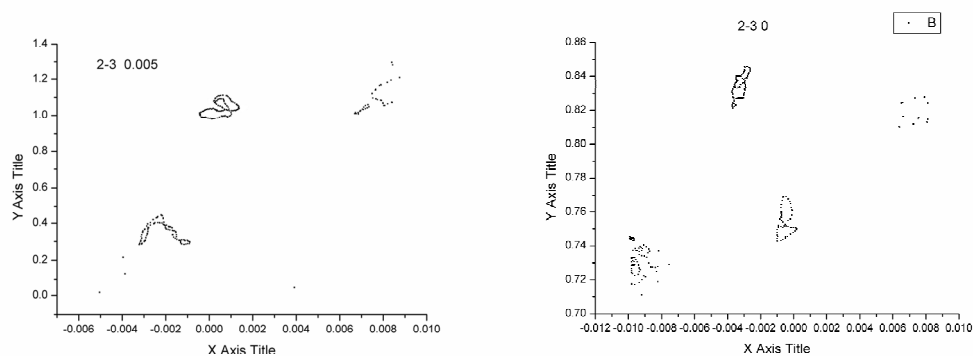


Рис.5. Точка P3. $R = 883.8$, сечения в дополнительной плоскости, $\{W = 0.0005; 0.0\}$.

Таким образом, можно заключить, что при анализе ЛТП в задаче течения с уступа для граничных условий G_1 показано, что усложнение происходит по сценарию: $C^1 \rightarrow T^2 \rightarrow T^3 \rightarrow T^{3 \otimes 2} \rightarrow ?$. Т.е. как по сценарию Ландау [4] (каскад бифуркаций увеличения размерности торов) так и по сценарию ФШМ [5]. Необходимо отметить, что для данной задачи сценарий Рюэля-Такенса по образованию и мгновенному разрушению трехмерного тора не обнаружен.

4.2 МГД течение в каверне

Для данной задачи было выбрано три точки внутри прямоугольной области Ω с относительными координатами: $p_1=\{0.5 \ 0.5\}$; $p_2=\{0.25 \ 0.25\}$; $p_3=\{0.125 \ 0.125\}$. В каждой точке рассматривались величины V_x, V_y (на рисунках 6-7 эти переменных обозначены как U, V). Поскольку физическая размерность задачи меньше трех, для графического представления проекции фазового пространства были использованы величины из разных контрольных точек: p_2 и p_3 (на рисунках 6-7 номер точки соответствует индексу после переменных U, V). Значения параметров $R_m = 1000, N = 0,2$ в данном случае фиксировались, а параметр R варьировался. Обнаружен следующий сценарий: рождение цикла (рис.6, слева); рождение тора (рис.6, справа); рождение цикла топологического периода 2 на месте резонансного тора с соотношением частот 1:2 (рис.7, слева), при этом не удалось точно установить, что именно происходит с тором (потеря устойчивости или разрушение); каскад удвоений получившегося цикла в соответствии с первой стадией сценария ФШМ (рис.7, справа).

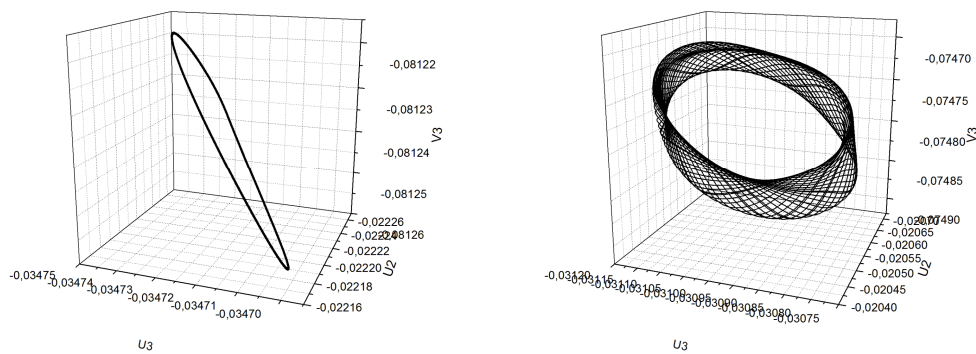


Рис. 6. $R = 2000$ слева: фазовое подпространство $\Theta(P_2, P_3)$; $R = 2500$ справа: фазовое подпространство $\Theta(P_2, P_3)$.

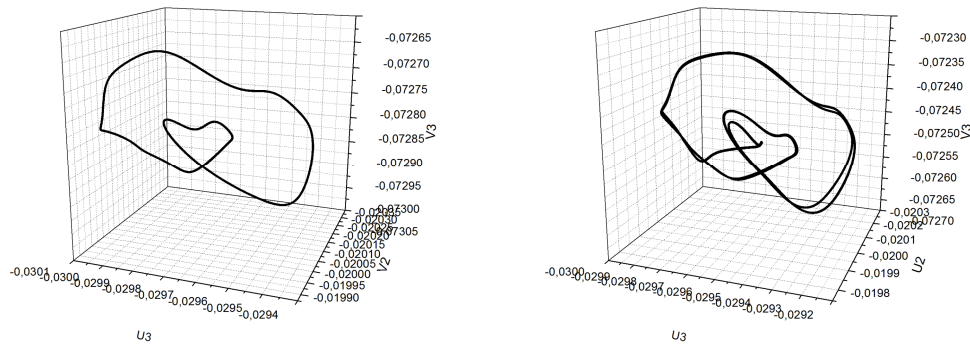


Рис. 7. $R = 2685$ слева: фазовое подпространство $\Theta(P_2, P_3)$; $R = 2720$ справа: фазовое подпространство $\Theta(P_2, P_3)$.

5. Заключение

В работе построены методы прямого численного моделирования для задач несжимаемой гидродинамики и МГД высокого порядка точности, способные разрешать нестационарные аттракторы (циклы и торы) соответствующих краевых задач. Гидродинамический метод реализован в двух вариантах: для MPI-совместимых архитектур и для архитектуры CUDA. Исследовано ускорение, которое дает использование GPU по сравнению с CPU для данного типа методов. Методы для МГД реализованы только для MPI-совместимых архитектур. На их примере произведено сравнение производительности небольших кластеров и вычислительного комплекса

IBM BlueGene/P. Рассмотрены две краевые задачи: гидродинамическое течение с уступа (трехмерная постановка) и МГД-течение в каверне (двухмерная постановка). Для этих задач были обнаружены начальные этапы сценария перехода к турбулентности. Для обеих задач начальные стадии представляют собой сочетание сценария Ландау-Хопфа и сценария ФШМ перехода к хаосу. Сценарий Рюэля-Таккенса подтвержден не был.

Литература

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука. 1982.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982.
4. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // Доклады Академии Наук СССР. 1944. Т.44. С.339-342.
5. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС. 2004.
6. A. Kurganov, E. Tadmor Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers // Num. Meth. Part. Diff. Eq. 2002. Vol. 18.
7. Mistrangelo C. Three-dimensional MHD flow in sudden expansions // Wissenschaftliche Berichte FZKA. 2006. Vol. 7201.
8. Cheng-Chin Wu A high order WENO finite difference scheme for incompressible fluids and magnetohydrodynamics // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 2007. Vol. 101. No. 1 pp. 37–61.
9. N.M. Evstigneev, N.A. Magnitskii, S.V. Sidorov On the nature of turbulence in a problem on the motion of a fluid behind a ledge // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 1.
10. U. Muller, L. Buhler Magnetofluidynamics in Channels and Containers // Springer – 2001.
11. Xu-Dong Liu, Stanley Osher, Tony Chan Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes // Journal of Computational Physics. Volume 115 Issue 1, Nov. 1994.