

# Параллельный программный комплекс POLARA для моделирования обтекания профилей и исследования расчетных схем метода вихревых элементов\*

И.К. Марчевский, В.С. Морева

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Разработан программный комплекс POLARA для моделирования обтекания профилей бессеточным лагранжевым методом вихревых элементов (МВЭ). Его основная задача — построение зависимостей аэродинамических коэффициентов профиля от угла атаки, сводящееся к решению в параллельном режиме серии независимых задач по расчету обтекания профиля. Реализованные алгоритмы позволяют также распараллеливать каждый расчет, и комплекс POLARA может применяться для решения задач, когда в расчетной схеме присутствуют десятки-сотни тысяч вихревых элементов и вычислительная сложность чрезвычайно высока. Не менее важна возможность проведения серий методических экспериментов по анализу влияния параметров расчетных схем МВЭ.

## 1. Введение

Метод вихревых элементов (МВЭ) является весьма эффективным численным методом моделирования двумерных течений несжимаемой среды; в настоящее время он интенсивно развивается как в нашей стране, так и за рубежом [1, 2]. Возможности метода достаточно широки: он с одной стороны позволяет исследовать фундаментальные вопросы гидромеханики вплоть до эффектов, которые невозможно или чрезвычайно трудно смоделировать при использовании других численных методов [3], а с другой стороны — дает возможность решать многие инженерные задачи с приемлемой для практических приложений точностью при достаточно низких затратах машинного времени (по сравнению с сеточными методами).

В частности, одним из актуальных направлений исследований является разработка эффективных методов моделирования поведения конструкций в потоке жидкости или газа, когда требуется решать сопряженную задачу движения профиля в потоке под действием гидродинамических сил. Во многих математических моделях учет влияния набегающего потока на обтекаемый профиль приближенно, но вполне обоснованно осуществляется при помощи безразмерных стационарных аэродинамических коэффициентов  $C_{xa}$ ,  $C_{ya}$  и  $C_m$  (коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента соответственно). Движение профиля сопровождается изменением его угла атаки по отношению к набегающему потоку, что влечет за собой изменение аэродинамических нагрузок, которое может быть учтено через зависимости аэродинамических коэффициентов от угла атаки. Для некоторых представляющих практический интерес профилей эти зависимости определены экспериментально; однако в соответствующих справочниках приводятся данные лишь для определенного класса профилей, чаще всего — крыловых, а также для простейших форм плохообтекаемых профилей [4, 5].

В ряде случаев решаемые задачи сводятся к исследованию влияния потока среды на систему профилей, при этом одни профили (подветренные) попадают в спутный след других (наветренных). Зависимости их стационарных аэродинамических коэффициентов от взаимного расположения профилей с учетом взаимовлияния подробно исследованы экспериментально лишь для круговых профилей [6]. Таким образом, задача численного моделирования

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-00699-а) с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

обтекания профилей и определения их аэродинамических характеристик в зависимости от угла атаки профиля либо его расположения по отношению к другим обтекаемым профилям является актуальной.

Для получения стационарных значений  $C_{xa}$ ,  $C_{ya}$  и  $C_m$  для фиксированного угла атаки профиля требуется решить нестационарную задачу о моделировании обтекания неподвижного профиля, установленного под данным углом, а затем осреднить вычисленные нестационарные значения аэродинамических коэффициентов по большому промежутку времени. Для получения достаточно точных зависимостей аэродинамических характеристик от угла атаки может потребоваться значительное число расчетов. Скорость решения всей задачи, т. е. построения зависимостей  $C_{xa}(\alpha)$ ,  $C_{ya}(\alpha)$  и  $C_m(\alpha)$  для определенного диапазона углов атаки  $\alpha$ , становится особенно важной, когда требуется провести анализ большого количества возможных вариантов, например, при решении задачи оптимизации и поиска оптимальной формы профиля. Аналогичная ситуация возникает при проведении вычислительных экспериментов, чрезвычайно важных при разработке новых или модификации существующих расчетных схем МВЭ. К этому же классу относятся “методические” задачи подбора оптимальных параметров расчетной схемы численного метода.

Целью настоящей работы является анализ способов ускорения вычислений, проводимых с помощью метода вихревых элементов, а также создание алгоритмов оптимизации использования имеющихся вычислительных ресурсов.

## 2. Метод вихревых элементов

Метод вихревых элементов [1–3] — это бессеточный лагранжев метод численного моделирования нестационарного обтекания профилей, основанный на моделировании эволюции завихренности. Распределение завихренности моделируется набором вихревых элементов (ВЭ), для каждого из которых задается положение в пространстве и интенсивность. Скорость среды в любой точке течения вычисляется по закону Био — Савара по известным характеристикам ВЭ, а давление определяется при помощи аналога интеграла Коши — Лагранжа.

Метод вихревых элементов особенно эффективен при решении внешних задач обтекания, поскольку на каждом шаге расчета по времени выполнение уравнения неразрывности и граничного условия на бесконечности происходит автоматически. Граничное условие непротекания или прилипания обеспечивается генерацией ВЭ на поверхности обтекаемых профилей, а течение идеальной либо вязкой среды, описываемое уравнениями Эйлера либо Навье — Стокса, моделируется движением имеющихся ВЭ. Интенсивности рождаемых ВЭ находятся из решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующей граничное условие на профиле, а движение ВЭ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой представляют собой скорости движения ВЭ.

Именно процедура определения скоростей вихревых элементов является наиболее затратной с вычислительной точки зрения, особенно при увеличении числа вихревых элементов в расчете, поскольку для этого приходится учитывать взаимное влияние всех пар ВЭ. Несколько менее трудоемкими, но тем не менее достаточно затратными являются операции реструктуризации вихревой пелены и вычисления аэродинамических нагрузок, действующих на профиль.

Таким образом, решение серии задач по расчету обтекания профилей под различными углами атаки требует выполнения большого объема вычислительной работы, но в силу однотипности и независимости отдельных задач процедуру их решения можно оптимизировать путем автоматизации проведения серии расчетов. Одним из перспективных направлений представляется применение параллельных алгоритмов, позволяющих оптимизировать использование имеющихся вычислительных ресурсов.

Помимо распараллеливания вычислений для сокращения времени счета возможно использование так называемого быстрого метода в “задаче  $N$  тел”. Аналог задачи  $N$  тел в методе вихревых элементов возникает при вычислении скоростей движения ВЭ, индуцируемых другими вихревыми элементами. Алгоритм приближенного решения данной задачи быстрым методом предлагается в работе [7]. Его использование позволяет существенно уменьшить вычислительную сложность задачи и дает возможность, к примеру, увеличить число вихревых элементов и тем самым повысить точность результатов.

### 3. Использование параллельных вычислений

#### 3.1. Общая схема распараллеливания вычислений в комплексе POLARA

Рассмотрим один из способов ускорения вычислений в методе вихревых элементов — использование параллельных алгоритмов [8]. В каждой из задач с помощью алгоритма метода вихревых элементов моделируется обтекание профиля под фиксированным углом атаки и определяются аэродинамические нагрузки, действующие на него. В силу независимости этих задач наиболее очевидным является внешнее распараллеливание — одновременное решение нескольких задач. Для его реализации в разработанном программном комплексе POLARA предусмотрена возможность работы на современных многопроцессорных (многоядерных) вычислительных системах, что позволяет осуществлять конвейерную обработку очереди задач: использование большого числа вычислительных ядер дает возможность проводить несколько расчетов одновременно; по мере завершения отдельных расчетов и освобождения соответствующих ядер на них запускается процесс решения следующих задач.

В программном комплексе POLARA реализовано также внутреннее распараллеливание — параллельное выполнение наиболее трудоемких этапов алгоритма (например, вычисление скоростей ВЭ) внутри решения одной задачи обтекания профиля. Использование данного механизма позволяет оптимизировать загрузку вычислительных ядер при решении большой серии задач, а также сократить временные затраты при решении малой серии задач или единственной задачи, которая может иметь чрезвычайно высокую вычислительную сложность.

Программный комплекс POLARA позволяет использовать оба типа параллелизма одновременно, причем число вычислительных ядер, выделяемых под решение различных задач обтекания профиля под конкретными углами атаки может выбираться пользователем произвольным образом. Это связано с тем, что для одного и того же профиля вычислительная сложность моделирования его обтекания может существенно зависеть от угла атаки.

Рассмотрим основные этапы алгоритма определения аэродинамических характеристик некоторого профиля в заданном диапазоне углов атаки. Для этого требуется решить серию из  $N_{task}$  задач, каждая из которых соответствует обтеканию под определенным углом атаки. Пусть общее число доступных процессоров (вычислительных ядер) равно  $N_{proc}$ , а для решения  $i$ -й задачи выделяется  $n_{proc}^{(i)}$  процессоров (рис. 1).

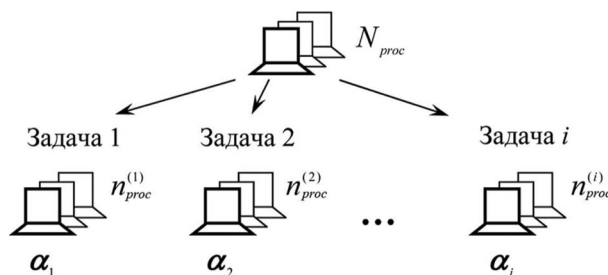


Рис. 1. Схема распараллеливания при решении задачи

**Этап 1.** На этапе запуска расчета из  $N_{proc}$  процессоров выделяется головной процессор, на который из текстового файла загружается очередь задач — список углов атаки  $\alpha_i$  с указанием чисел  $n_{proc}^{(i)}$ . На этот процессор также загружаются из соответствующих файлов общие параметры расчетной схемы, геометрия обтекаемого профиля и значение “кванта времени”  $t_{kvant}$  — времени, через которое происходит синхронизация работы параллельных ветвей программы, контроль загрузки процессоров и обновление очереди задач. Если в каких-то из запущенных расчетов выполняется условие прекращения счета, то их решение останавливается, а задействованные в них процессоры высвобождаются. Таким образом, глобальный головной процессор контролирует решение серии задач и осуществляет пересылки необходимых данных между другими процессорами.

**Этап 2.** Данный этап повторяется циклически, пока не будут решены все задачи из очереди. Если в результате анализа состояния вычислительной системы и очереди задач обнаруживается наличие необходимого числа свободных процессоров для запуска решения последующих задач, формируются подгруппы из  $n_{proc}^{(i)}$  процессоров и в каждой такой подгруппе выделяется головной процессор. Локальный головной процессор управляет ходом моделирования обтекания профиля на данном угле атаки и обеспечивает необходимые пересылки информации внутри своей подгруппы. Головные процессоры всех подгрупп обмениваются данными с глобальным головным процессором, передавая ему информацию о необходимости продолжения счета в данной задаче в течение следующего кванта времени или выполнении критерия останова счета.

**Этап 3.** На данном уровне осуществляется непосредственное численное моделирование обтекания профиля с помощью метода вихревых элементов. Шаги расчета по времени повторяются до тех пор, пока не закончится квант времени  $t_{kvant}$  или выполнится критерий останова, в качестве которого может использоваться признак выполнения заданного числа временных шагов.

### 3.2. Анализ эффективности распараллеливания

Наиболее затратными с вычислительной точки зрения являются следующие операции алгоритма МВЭ.

**Операция 1.** Вычисление скоростей ВЭ как результата их взаимного влияния друг на друга.

**Операция 2.** Реструктуризация вихревой пелены, приводящая к уменьшению числа ВЭ за счет объединения близкорасположенных ВЭ или исключения из расчетной схемы ВЭ, удалившихся от обтекаемого профиля на значительное расстояние.

**Операция 3.** Вычисление нагрузок, которые действуют на профиль со стороны потока, по рассчитанному полю скоростей и известному распределению завихренности.

Исследуем эффективность использования параллельных алгоритмов при решении плоских задач МВЭ (внутреннего распараллеливания). На рис. 2 представлены оценки вычислительной трудоемкости различных этапов последовательного алгоритма МВЭ.

Видно, что наиболее трудоемким является вычисление скорости ВЭ. Другие две операции — реструктуризация вихревой пелены и вычисление аэродинамических нагрузок — менее трудоемки, в то время как затратами машинного времени на прочие операции (например, решение системы линейных уравнений) можно пренебречь. Аналогичные соотношения трудоемкостей были получены и при решении пространственных задач обтекания тел методом вихревых элементов [9].

Согласно хорошо известному закону Амдаля [8], для вычислительной системы с  $S$  процессорами (вычислительными ядрами) максимально возможное ускорение компьютерной программы с долей  $P$  параллельного кода и  $(1 - P)$  последовательного кода равно

$$\alpha = \frac{1}{\frac{P}{S} + (1 - P)}.$$



**Рис. 2.** Трудоемкость операций в методе вихревых элементов

С помощью этой формулы вычислено максимальное ускорение, которое теоретически достижимо при распараллеливании только операций 1, операций 1, 2 или операций 1, 2, 3 алгоритма, например, для вычислительных систем с 4, 16 и 64 ядрами. Результаты представлены в таблице 1.

**Таблица 1.** Максимальное ускорение параллельного кода

Распараллеленные операции	Доля параллельного кода	Максимальное ускорение		
		4 ядра	16 ядер	64 ядра
1	95,3 %	3,5	9,4	16,2
1, 2	98,2 %	3,8	12,6	30,0
1, 2, 3	99,5 %	3,9	14,9	48,7

Видно, что для вычислений с использованием небольшого числа ядер максимальные значения ускорений близки. Но при использовании системы с десятками вычислительных ядер распараллеливание операций 2 и 3 метода вихревых элементов дает значительный вклад в ускорение, несмотря на то, что трудоемкость этих операций составляют вместе лишь малую долю от трудоемкости операции 1 (приблизительно 4,4 %).

Реальное ускорение, наблюдаемое в расчетах, несколько меньше, чем предсказывает закон Амдаля, поскольку оценки ускорения по этому закону получены для “идеального” распараллеливания, т. е. ситуации, когда параллельный код выполняется в  $S$  раз быстрее на  $S$ -ядерной вычислительной системе.

На рис. 3 для программного комплекса POLARA представлена зависимость ускорения от числа вычислительных ядер при распараллеливании операций 1, 2 и 3 алгоритма, полученная при решении одной, весьма сложной с вычислительной точки зрения задачи обтекания профиля под фиксированным углом атаки. Для сравнения показано максимальное значение ускорения для случаев распараллеливания только операции 1, операции 1, 2 и операций 1, 2, 3.

Реальное ускорение при распараллеливании операций 1, 2, 3 близко к оценке по закону Амдаля для распараллеливания только операций 1, 2 (сказывается наличие пересылок данных, затрат на синхронизацию вычислений и прочих “накладных расходов”), поэтому, можно сделать вывод о том, что распараллеливание операции 3 важно для достижения

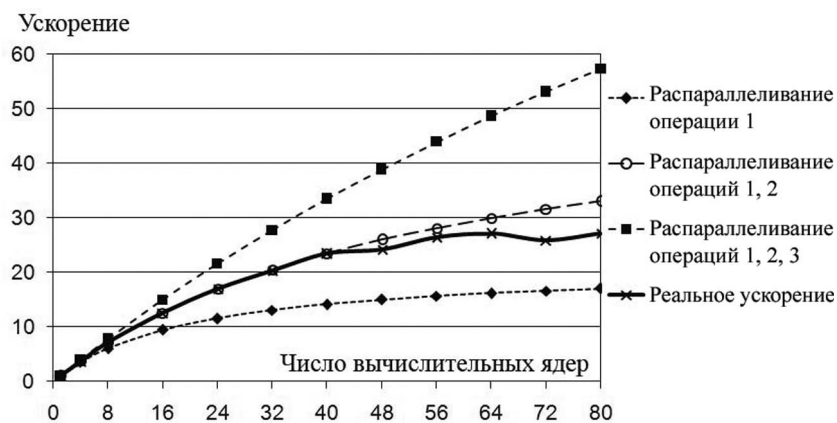


Рис. 3. Реальное ускорение и оценки по закону Амдаля (внутреннее распараллеливание)

высокой эффективности, хотя ее трудоемкость крайне мала — всего около 1,3 %.

Если требуется решить не одну задачу, пусть и весьма трудоемкую, а серию задач по расчету обтекания профиля под различными углами атаки, эффективность применения параллельных алгоритмов (внешнего распараллеливания) может быть существенно выше. В качестве тестового примера рассматривалась серия из 91 задачи по моделированию обтекания крылового профиля под различными углами атаки; в каждом расчете выполнялось 5000 временных шагов. На рис. 4 показаны затраты машинного времени при решении этой серии задач с помощью программного комплекса POLARA на 1, 32 и 64 вычислительных ядрах, а также зависимость ускорения вычислений от числа используемых ядер при проведении расчетов на вычислительных комплексах МВС-100К (МСЦ РАН), СКИФ-МГУ “Чебышев” (МГУ им. М.В. Ломоносова) и учебно-экспериментальном вычислительном кластере (МГТУ им. Н.Э. Баумана) [10].

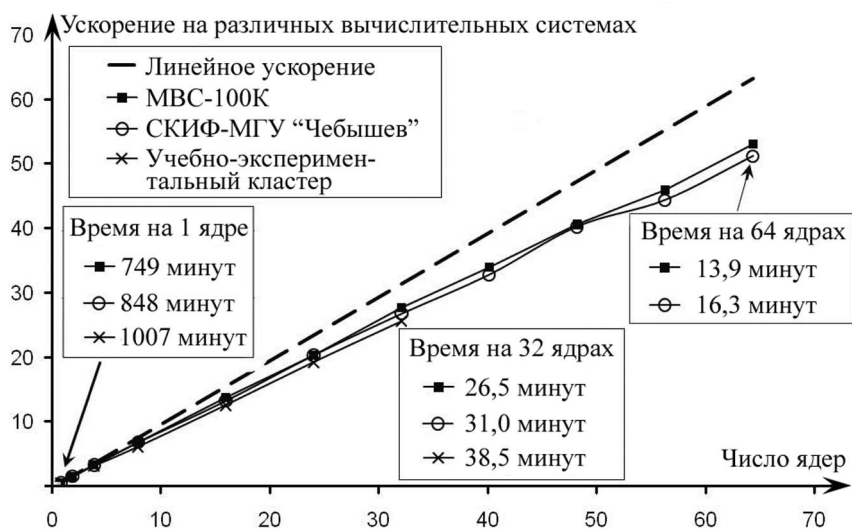


Рис. 4. Ускорение при решении серии задач (внешнее распараллеливание)

Видно, что на всех вычислительных комплексах ускорение растет практически линейно с ростом числа задействованных ядер, при использовании 64 вычислительных ядер удается получить более, чем 50-кратное ускорение расчетов.

### 3.3. Возможности применения различных моделей параллельного программирования

В рассмотренном выше примере для распараллеливания вычислений использовалась библиотека MPI как для внешнего, так и для внутреннего распараллеливания. Целесообразность ее применения для внешнего распараллеливания, т.е. для одновременного решения нескольких полностью независимых задач, не вызывает сомнений ввиду практически отсутствующего межпроцессорного обмена данными. В то же время при распараллеливании решения каждой задачи (внутреннем) интенсивность обменов данными между задействованными в расчете ядрами становится существенной, поэтому для повышения эффективности работы программного комплекса была исследована возможность применения для этих целей технологии OpenMP. С ее помощью были распараллелены те же 3 наиболее трудозатратные операции, что и при использовании MPI.

При проведении расчетов на вычислительных машинах с общей памятью на 2–8 вычислительных ядрах было установлено, что выигрыш по времени, достигаемый за счет использования OpenMP, не превышает нескольких процентов по сравнению с применением MPI. В связи с этим данная возможность практически не использовалась, поскольку применение MPI позволяет сделать программу универсальной — она может работать как на системах с общей, так и с распределенной памятью (кластерах). При этом для целей внутреннего распараллеливания может использоваться произвольное число вычислительных ядер, которые могут находиться на различных узлах кластера. В последнем случае эффективность распараллеливания, очевидно, снизится, но такая возможность необходима для решения сложных задач, когда в расчетной схеме присутствуют десятки-сотни тысяч вихревых элементов.

## 4. Использование быстрого метода вычисления вихревого влияния

### 4.1. Схема применения быстрого метода

Помимо применения параллельных алгоритмов, в программном комплексе POLARA предусмотрена возможность использования так называемого быстрого метода в “задаче  $N$  тел”, позволяющего сократить временные затраты на выполнение наиболее трудоемкой операции алгоритма — вычисление скоростей вихревых элементов, обусловленных их взаимным влиянием друг на друга. Быстрые методы решения “задачи  $N$  тел” основаны на том, что при расчете влияния удаленных ВЭ их коллективное воздействие рассчитывается приближенно согласно формулам, представленным в [7].

Первым этапом алгоритма быстрого метода является построение дерева — иерархической структуры прямоугольных областей (рис. 5), при этом прямоугольник нулевого уровня содержит все ВЭ. Он делится по длинной стороне на два одинаковых прямоугольника первого уровня. Путем перебора вихревых элементов определяется их принадлежность к одному из них. Далее аналогичным образом эти прямоугольники делятся пополам, образуя области второго уровня. Деление прекращается при выполнении заданного критерия по размеру прямоугольника, количеству ВЭ в нем и (или) номеру уровня. На втором этапе непосредственно вычисляются суммарные циркуляции и “центры тяжести” положительных и отрицательных ВЭ в каждом прямоугольнике нижнего уровня, а аналогичные параметры областей более высокого уровня находятся по характеристикам дочерних областей. Далее находятся скорости ВЭ в областях нижнего уровня: влияние ВЭ, находящихся в той же области, а также близкорасположенных ВЭ из других областей рассчитывается непосредственно по закону Био — Савара, а далее осуществляется обход дерева, и влияние ВЭ, расположенных в достаточно удаленных областях, учитывается при помощи 4 коэффици-

ентов, которые одинаковы для всех ВЭ из данной области.

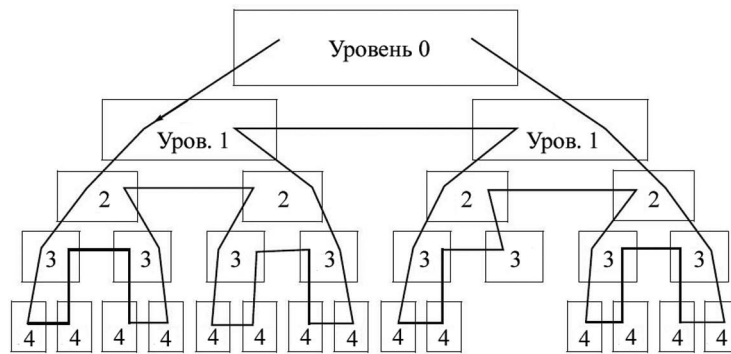


Рис. 5. Структура дерева, имеющего глубину 4 уровня, и направление его обхода

Соотношение трудоемкостей различных этапов алгоритма МВЭ при использовании быстрого метода, полученное при решении той же задачи, что была рассмотрена выше (рис. 2), имеет следующий вид (рис. 6).



Рис. 6. Трудоемкость операций в методе вихревых элементов при использовании быстрого метода

В сравнении с предыдущими оценками видно, что доля затрат на вычисление скоростей ВЭ сократилась, хотя и осталась доминирующей. Соотношение трудоемкостей операций при этом несколько изменилось, что связано с использованием при их выполнении оптимизированных алгоритмов, использующих имеющуюся иерархическую структуру дерева в вихревом следе. Использование быстрого метода решения “задачи  $N$  тел” позволило сократить общее время счета в рассмотренной тестовой задаче в 6 раз, поэтому его внедрение является целесообразным при решении “тяжелых” задач с достаточно большим числом ВЭ.

#### 4.2. Оценка оптимальной глубины дерева

Актуальной задачей является выбор максимальной глубины построения дерева, при котором вычисление скоростей всех ВЭ может быть выполнено максимально быстро. Для этого оценим число арифметических операций (умножения и деления), выполняемых при вычислении скоростей ВЭ. Рассмотрим  $N$  ВЭ, равномерно распределенных в круге радиуса  $a/\sqrt{\pi}$ , тогда ячейка нулевого уровня — это квадрат со стороной  $a$ . Приблизительно будем считать, что все ячейки всех уровней являются квадратными, тогда на  $k$ -м уровне имеется  $N_k = \frac{\pi}{4} \cdot 2^k = \pi \cdot 2^{k-2}$  ячеек — квадратов со стороной  $a_k = \frac{a}{(\sqrt{2})^k}$  (учитываются только ячейки,



попадающие внутрь круга). Пусть построено дерево глубиной  $k$  уровней; рассмотрим одну его ячейку и рассчитаем число ячеек этого же уровня, попадающих в ближнюю зону (т. е. тех ячеек, влияние ВЭ из которых будет учитываться непосредственно по закону Био — Савара). Под ближней зоной будем понимать круг с центром в центре данного квадрата и радиусом  $\Delta = \frac{h}{\theta}$ , где  $h$  — сумма габаритов ячеек (в данном случае  $h = 4a/(\sqrt{2})^k = a/(\sqrt{2})^{k-4}$ ,  $0 < \theta \leq 4$  — критерий близости). Число ячеек  $k$ -го уровня дерева, попадающих в этот круг, составляет

$$N_{\text{ближ}} = \frac{2^4 \pi}{\theta^2}.$$

Пусть  $j = m_{ks}$  — расстояние, выражаемое в длинах стороны квадрата  $k$ -го уровня, при котором квадрат  $s$ -го уровня попадает в дальнюю зону (т. е. относится к ячейкам, влияние ВЭ из которых вычисляется приближенно и быстро)

$$j = m_{ks} = \frac{2}{\theta}(1 + (\sqrt{2})^{k-s}),$$

тогда на расстоянии  $j = m_{ks}$  ячеек  $k$ -го уровня к дальней зоне будут относиться ячейки уровня

$$s = k + 2 - 2 \log_2(\theta j - 2).$$

Радиусы ближней области и всей исходной области, выраженные в длинах стороны квадрата  $k$ -го уровня, равны соответственно  $p_k = \frac{4}{\theta}$  и  $P_k = \frac{(\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}}$ , тогда приближенно количество ячеек (максимально высокого уровня), находящихся в дальней зоне, можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\text{дал}} &= \sum_{j=p_k+1}^{P_k} \frac{(2\pi a_k \cdot j) a_k}{a_s^2} = 8\pi \sum_{j=\frac{4}{\theta}+1}^{\frac{(\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}}} \frac{j}{(\theta j - 2)^2} \approx \\ &\approx \int_{\frac{4}{\theta}}^{\frac{(\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}}} \frac{y}{(\theta y - 2)^2} dy = \frac{8\pi}{\theta^2} \left[ \ln \left( \frac{\theta(\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} - 1 \right) - \left( \frac{\theta(\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} - 1 \right)^{-1} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Вычисление четырех коэффициентов влияния от каждой ячейки дальней зоны требует 28 арифметических операций, таким образом общее число операций, равно

$$Q_1 = 28 \cdot N_{\text{дал}} \cdot \pi 2^{k-2} = \frac{56\pi^2 2^k}{\theta^2} \left[ \ln \left( \frac{\theta(\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} - 1 \right) - \left( \frac{\theta(\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} - 1 \right)^{-1} + 1 \right].$$

Вычисление скоростей ВЭ, находящихся внутри ячеек нижнего уровня, через рассчитанные коэффициенты требует

$$Q_2 = 4 \cdot \frac{N}{\pi \cdot 2^{k-2}} \cdot \pi 2^{k-2} = 4N$$

арифметических операций.

Влияние ВЭ ближней зоны, рассчитываемое напрямую по закону Био — Савара, требует

$$Q_3 = 6 \cdot N_{\text{ближ}} \cdot \left( \frac{N}{\pi 2^{k-2}} \right)^2 \cdot \pi 2^{k-2} = \frac{3N^2}{\theta^2 2^{k-7}}$$

арифметических операций.

Итого, общее число операций, необходимое для вычисления скорости на одном шаге расчета составляет

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{224\pi^3 p^2}{\theta^4} \left[ \ln(p-1) - \frac{1}{p-1} + 1 \right] + 4N + \frac{96N^2}{\pi p^2},$$

где  $p = \frac{\theta \cdot 2^{k/2}}{2\sqrt{\pi}}$ .

Для поиска значения  $p$ , при котором число арифметических операций минимально, следует приравнять к нулю производную  $Q'(p)$ . В результате получается алгебраическое уравнение

$$p^4 \left( 2 \ln(p-1) + 3 + \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \frac{6N^2\theta^4}{7\pi^4}, \quad (1)$$

левая часть которого при  $p > 1,5$  является возрастающей функцией; следовательно оно имеет единственное решение  $p = p^*$ , которое может быть найдено численно. Поскольку оптимальное значение глубины дерева  $k^*$  — натуральное число, оно вычисляется по формуле

$$k^* = \left\lceil 2 \left( \log_2 p^* + \log_2 \frac{2\sqrt{\pi}}{\theta} \right) \right\rceil, \quad (2)$$

в которой квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Для проверки полученной оценки проведены расчеты при  $N = 30\,000$ ;  $60\,000$ ;  $120\,000$ . В табл. 2 приведены зависимости времени выполнения алгоритма быстрого метода от максимальной глубины дерева, при этом время счета для оптимальной глубины дерева, найденной по формулам (1)–(2), принято за единицу.

**Таблица 2.** Оптимальное число уровней дерева

Число уровней дерева	Время счета $t_k/t_{k^*}$		
	$N = 30\,000$ $k^* = 13$	$N = 60\,000$ $k^* = 14$	$N = 120\,000$ $k^* = 15$
11	2,20	4,01	7,12
12	1,18	2,04	3,55
13	1,00	1,30	2,07
14	1,27	1,00	1,11
15	1,88	1,38	1,00
16	2,04	2,04	1,34

Видно, что полученная оценка оптимального числа уровней дерева  $k^*$  верна, и именно при данной глубине дерева время счета является минимальным. Данная оценка является более точной, чем в работе [11].

Совместное использование быстрого метода вычисления вихревого влияния и параллельных вычислительных алгоритмов позволяет получить еще больший выигрыш по времени проведения расчета. Собственно быстрый метод хорошо распараллеливается, при этом используются те же подходы, что и в „прямом“ методе вычисления вихревого влияния. Процедуру построения иерархической структуры дерева распараллелить существенно сложнее, однако на практике в этом нет острой необходимости, поскольку время построения дерева (при числе уровней дерева, близком к оптимальному) обычно составляет доли процента от времени вычисления вихревого влияния, и эту процедуру можно осуществлять на всех вычислительных ядрах, занятых в параллельном расчете.

## 5. Исследование расчетных схем метода вихревых элементов

При создании программных комплексов для решения инженерных задач по моделированию обтекания профилей потоком с использованием МВЭ, а также при создании новых и модификации существующих расчетных схем метода возникает задача верификации разработанных моделей и оптимального подбора параметров, входящих в расчетную схему МВЭ. Расчетная схема МВЭ содержит ряд задаваемых расчетчиком параметров, наиболее важные из которых представлены в таблице 3.

Таблица 3. Основные параметры расчетной схемы МВЭ

$\Delta t$	шаг расчета по времени
$\varepsilon$	радиус вихревого элемента
$\varepsilon_{col}$	радиус коллапса — расстояние, на котором соседние ВЭ объединяются
tik type	метод контроля условия „непротыкания“
odu ord	порядок точности метода решения ОДУ, описывающих движение ВЭ [12]

Для верификации расчетной схемы и метода в целом необходимо проведение серии методических экспериментов. Опыт показывает, что при расчете обтекания существенно различных профилей (например, цилиндра или профиля крыла) параметры расчетной схемы следует выбирать по-разному. Для их подбора обычно решается задача о расчете обтекания „эталонного“ профиля с заранее известными характеристиками. Параметры расчетной схемы выбираются таким образом, чтобы согласовать результаты расчета с ними. Далее с этими же параметрами можно проводить исследование характеристик целого класса профилей, близких к „эталонному“ по форме, относительной толщине и т.п. Результаты расчетов показывают, что в этом случае характеристики исследуемых профилей удастся вычислять достаточно точно. Проведение методических экспериментов требует выполнения большого числа расчетов, поскольку при подборе параметров расчетной схемы МВЭ нельзя ограничиться проведением серии расчетов для одного фиксированного угла атаки; для каждого исследуемого набора параметров требуется построение всей поляры или некоторой ее части. Это связано с тем, что режим обтекания профиля может существенно зависеть от угла атаки, и при некотором наборе параметров расчетной схемы результаты моделирования будут приемлемыми для одних углов и существенно неверными для других.

При выполнении расчетов указанного типа общая логика работы программного комплекса POLARA сохраняется, при этом отдельные независимые расчеты отличаются не только углом атаки, но также и набором параметров расчетной схемы, перечисленных в таблице 3. К их числу при необходимости могут быть отнесены и другие параметры; это потребует лишь незначительной переработки алгоритма комплекса POLARA. Следует отметить, что если при построении поляры профиля число расчетов редко превосходит несколько десятков, то при проведении методических исследований расчетных схем метода при варьировании хотя бы 2–3 параметров в некоторых, даже довольно узких пределах, число проводимых расчетов может составлять несколько сотен и даже тысяч. Поэтому использование параллельных вычислительных технологий, которые позволяют с высокой эффективностью выполнять указанные серии расчетов на многопроцессорных вычислительных комплексах, здесь особенно актуально.

## 6. Выводы

Предложены подходы, позволяющие сократить временные затраты при проведении расчетов методом вихревых элементов. С использованием параллельных вычислительных алгоритмов разработан программный комплекс POLARA, автоматизирующий и оптимизирующий процесс решения серии однотипных и независимых задач моделирования обтекания профиля.

В программном комплексе POLARA реализована возможность применения быстрого метода решения “задачи  $N$  тел”, который позволяет сократить время вычислений (по сравнению с прямым методом), что важно при проведении расчетов с большим числом вихревых элементов. Построена оценка оптимального числа уровней дерева, при которой время счета максимально сокращается. Данная оценка подтверждена на тестовых примерах.

## Литература

1. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge University Press, 2008. 328 p.
2. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
3. Дынникова Г.Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 2011. 269 с.
4. Случановская Э.П. Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Тр. Инс-та механики МГУ, № 24. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 52–60.
5. Кашафутдинов С.Т., Лушин В.Н. Атлас аэродинамических характеристик крыловых профилей. Новосибирск: СО РАН, 1994. 78 с.
6. Здравкович М.М. Обзор исследований интерференции между двумя круглыми цилиндрами при различном их взаимном расположении // Труды Америк. общества инж.-механиков, сер. “Д”, рус. перевод. 1977. Т. 99, № 4. С. 119–137.
7. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения “задачи  $N$  тел” при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т 49, № 8. С. 1458–1465.
8. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. М.: Бином, 2007. 424 с.
9. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Применение параллельных алгоритмов при решении задач гидродинамики методом вихревых элементов // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т 11. С. 105–110.
10. Лукин В.В., Марчевский И.К. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч.1. Инструментарий и возможности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. № 4. С. 28–43.
11. Гирча А.И. Быстрый алгоритм решения „Задачи  $N$  тел“ в контексте численного метода вязких вихревых доменов // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 1. С. 47–52.
12. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование обтекания системы профилей методом вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2010. № 1. С. 12–20.