

# Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков

Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге

Работа посвящена разработке математической модели для расчета полей скоростей применительно к прибрежным системам и мелководным водоемам, таким как Азовское море. Отличительными особенностями разрабатываемых алгоритмов являются: высокая производительность, достоверность и точность получаемых результатов. В работе представлены параллельный метод и численные результаты моделирования гидродинамических процессов в Азовском море на основе программного комплекса «Azov3D», созданного в ТТИ ЮФУ. Для построенного параллельного алгоритма выполнены теоретические и экспериментальные оценки ускорения и эффективности.

## 1. Введение

Исследования Азовского моря проводятся уже более ста лет. За это время накоплен большой объем натуральных данных обо всех компонентах морской экосистемы, выявлены многие закономерности их функционирования и взаимодействия. Наряду с натурными и экспериментальными исследованиями, одной из основных задач является архивация и систематизация первичной информации, накопленной исследователями ТТИ ЮФУ. Такой подход к изучению гидродинамических и гидробиологических явлений предусматривает формирование базы данных и применение математического моделирования морских процессов.

В ходе экспедиционных исследований в 2001 была обнаружена зона анаэробного заражения и наблюдалась массовая гибель ихтиофауны в восточной части Азовского моря [1]. Для реконструкции сценария экологической катастрофы, а также для моделирования возможных вариантов биологической реабилитации водоема был создан ряд высокоточных математических моделей гидрофизических процессов в мелководных водоемах. Данные модели описывают движение водной среды с учетом следующих факторов: ветровые течения и трение о дно, стоки рек, испарение, сила Кориолиса, турбулентный обмен, сгонно-нагонные явления, сложная геометрия дна и береговой линии. Другое актуальное назначение высокоточных математических моделей гидрофизических процессов связано со своевременным предсказанием различных природных катаклизмов, связанных с изменением уровня воды: затоплением прибрежных районов, обмелением судоходных каналов и др.

## 2. Математическая модель гидродинамики мелководных водоемов

Азовское море расположено на юго–западе России и имеет максимальную протяженность с севера на юг - 250 км., с запада на восток - 350 км., а максимальная глубина равна 14 м. Модель предназначена для оценки и прогнозирования состояния водной среды водоема. Математическое описание основано на выделении осредненных составляющих параметров течения среды (скорости, давления). Уравнения модели движения жидкости рассматриваются в прямоугольной области геоинформационной системы Азовского моря. Оси  $Ox$  и  $Oy$  имеют горизонтальные направления с запада на восток и с севера на юг соответственно. Ось  $Oz$  направлена вертикально вниз.

Исходными уравнениями гидродинамики мелководных водоемов являются [2-3]:

– уравнение движения (Навье – Стокса):

$$\begin{aligned}
u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (v u'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \\
v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \\
w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta;
\end{aligned}
\tag{1}$$

– уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0,
\tag{2}$$

где  $V = \{u, v, w\}$  – компоненты вектора скорости,  $p$  – превышение давления над гидростатическим давлением невозмущенной жидкости,  $\rho$  – плотность,  $\Omega$  – угловая скорость вращения земли,  $\theta$  – угол между вектором угловой скорости и вертикалью,  $\mu, v$  – горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

Система уравнений (1) – (2) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе (устье рек Дон и Кубань) –

$$u(x, y, z, t) = u(t), \quad v(x, y, z, t) = v(t), \quad p'_n(x, y, z, t) = 0, \quad V'_n(x, y, z, t) = 0,$$

– боковая граница (берег и дно) –

$$\rho \mu (u')_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t), \quad V_n(x, y, z, t) = 0, \quad p'_n(x, y, z, t) = 0,$$

– верхняя граница –

$$\rho \mu (u')_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t),
\tag{3}$$

$$w(x, y, t) = -\omega - p'_t / \rho g, \quad p'_n(x, y, t) = 0,$$

– на выходе (Керченский пролив) –

$$p'_n(x, y, z, t) = 0, \quad V'_n(x, y, z, t) = 0,$$

где  $\omega$  – интенсивность испарения жидкости,  $\tau_x, \tau_y$  – составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна).

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности:

$$\tau_x = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_x |\vec{w}|, \quad \tau_y = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_y |\vec{w}|,$$

где  $\vec{w}$  – вектор скорости ветра относительно воды,  $\rho_a$  – плотность атмосферы,

$$C_p(x) = \begin{cases} 0.0088, & x < 6,6 \text{ м/с} \\ 0.0026, & x \geq 6,6 \text{ м/с} \end{cases} \text{ — безразмерный коэффициент.}$$

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом введенных обозначений могут быть записаны следующим образом:

$$\tau_x = \rho_v C_p (|V|) u |V|, \quad \tau_y = \rho_v C_p (|V|) v |V|,$$

где  $\rho_v$  – плотность донных отложений.

Рассмотренная ниже аппроксимация позволяет на основании измеренных пульсаций скоростей строить коэффициент вертикального турбулентного обмена, неоднородный по глубине[4]:

$$v = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2},
\tag{4}$$

где  $\bar{U}, \bar{V}$  – осредненные по времени пульсации горизонтальных компонент скорости,  $\Delta$  – характерный масштаб сетки,  $C_s$  – безразмерная эмпирическая константа, значение которой обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

### 3. Дискретная модель гидродинамики мелководных водоемов

Расчетная область вписана в параллелепипед. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики вводится равномерная сетка:

$$\bar{w}_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y}, k = \overline{0..N_z};$$

$$N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z\},$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $h_x, h_y, h_z$  – шаги по пространству,  $N_t$  – количество временных слоев,  $T$  – верхняя граница по временной координате,  $N_x, N_y, N_z$  – количество узлов по пространственным координатам,  $l_x, l_y, l_z$  – границы по параллелепипеда в направлении осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Для решения задачи гидродинамики использовался метод поправки к давлению[5]. Вариант данного метода в случае переменной плотности примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z &= (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (v\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta), \\ \frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z &= (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (v\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u\sin\theta, \\ \frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z &= (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (v\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u\cos\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \frac{\hat{\rho}-\rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau},$$

$$\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\hat{p}'_x, \quad \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\hat{p}'_y, \quad \frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\hat{p}'_z,$$

где  $V = \{u, v, w\}$  – компоненты вектора скорости,  $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}, \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$  – компоненты полей вектора скорости на «новом» и промежуточном временных слоях соответственно,  $\bar{u} = (\tilde{u} + u)/2$ ,  $\hat{\rho}$  и  $\rho$  – распределение плотности водной среды на новом и предыдущем временных слоях соответственно.

При построении дискретных математических моделей гидродинамики учитывалась «заполненность» контрольных ячеек, что позволяет повысить реальную точность решения в случае сложной геометрии исследуемой области за счет улучшения аппроксимации границы.

Через  $o_{i,j,k}$  обозначена «заполненность» ячейки  $(i, j, k)$ . Степень «заполненности» ячейки определяется давлением столба жидкости внутри данной ячейки. Если среднее давление в узлах, которые относятся к вершинам рассматриваемой ячейки, больше давления столба жидкости внутри ячейки, то ячейка считается заполненной полностью ( $o_{i,j,k} = 1$ ). В общем случае «заполненность» ячеек можно вычислить по следующей формуле:

$$o_{i,j} = \frac{P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k} + P_{i,j-1,k} + P_{i-1,j-1,k}}{4\rho gh_z}, \quad (6)$$

где  $P = p + \rho gz$  – давление.

Вводятся коэффициенты  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ , описывающие «заполненность» областей, находящихся в окрестности ячейки (контрольных областей). Значение  $q_0$  характеризует «заполненность» области  $D_0: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_1 - D_1: \{x \in (x_i, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_2 - D_2: \{x \in (x_{i-1}, x_i), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_3 - D_3: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_j, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_4 - D_4: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_j), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_5 - D_5: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_k, z_{k+1})\}$ ,  $q_6 - D_6:$

$\{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_k)\}$ . Заполненные части областей  $D_m$  будем называть  $\Omega_m$ , где  $m = \overline{0..6}$ . В соответствии с этим коэффициенты  $q_m$  можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} (q_m)_{i,j,k} &= \frac{S_{\Omega_m}}{S_{D_m}}, (q_1)_{i,j,k} = \frac{o_{i+1,j,k} + o_{i+1,j+1,k} + o_{i+1,j,k+1} + o_{i+1,j+1,k+1}}{4}, \\ (q_2)_{i,j,k} &= \frac{o_{i,j,k} + o_{i,j+1,k} + o_{i,j,k+1} + o_{i,j+1,k+1}}{4}, (q_3)_{i,j,k} = \frac{o_{i+1,j+1,k} + o_{i,j+1,k} + o_{i+1,j+1,k+1} + o_{i,j+1,k+1}}{4}, \\ (q_4)_{i,j,k} &= \frac{o_{i,j,k} + o_{i+1,j,k} + o_{i,j,k+1} + o_{i+1,j,k+1}}{4}, (q_5)_{i,j,k} = \frac{o_{i,j,k+1} + o_{i+1,j,k+1} + o_{i+1,j+1,k+1} + o_{i,j+1,k+1}}{4}, \\ (q_6)_{i,j,k} &= \frac{o_{i,j,k} + o_{i+1,j,k} + o_{i+1,j+1,k} + o_{i,j+1,k}}{4}, (q_0)_{i,j,k} = \frac{1}{2}((q_1)_{i,j,k} + (q_2)_{i,j,k}). \end{aligned}$$

В случае граничных условий третьего рода

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n$$

дискретные аналоги операторов конвективного  $uc'_x$  и диффузионного  $(\mu c'_x)'_x$  переноса, полученные при помощи интегро-интерполяционного метода [6], учитывающие частичную «заполненность» ячеек, могут быть записаны в следующем виде [7]:

$$\begin{aligned} uc'_x \square (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \\ (\mu c'_x)'_x \square (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом запишутся аппроксимации по оставшимся координатным направлениям.

Погрешность аппроксимации математической модели равна  $O(\tau + \|h\|^2)$ , где  $\|h\| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$ . Доказано сохранение потока на дискретном уровне разработанной гидродинамической модели, а также отсутствие неконсервативных диссипативных слагаемых, полученных в результате дискретизации системы уравнений. Достаточное условие устойчивости и монотонности разработанной модели определяется на основе принципа максимума [6] при ограничениях на шаг по пространственным координатам:

$$h_x < |2\mu / u|, h_y < |2\mu / v|, h_z < |2\nu / w| \text{ или } \text{Re} \leq 2N,$$

где  $\text{Re} = |V| \cdot l / \mu$  – числа Рейнольдса,  $l$  – характерный размер области,  $N = \max\{N_x, N_y, N_z\}$ .

Дискретные аналоги системы уравнений (5) решаются адаптивным модифицированным попеременно – треугольным методом вариационного типа [8-9].

## 4. Метод решения сеточных уравнений

Полученные сеточные уравнения можно записать в матричном виде:

$$Ax = f, \tag{7}$$

где  $A$  – линейный, положительно определенный оператор ( $A > 0$ ). Для нахождения решения задачи (7) будем использовать неявный итерационный процесс

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f. \tag{8}$$

В уравнении (8)  $m$  – номер итерации,  $\tau > 0$  – итерационный параметр, а  $B$  – некоторый обратимый оператор, который называется преобуславливателем или стабилизатором. Обращение оператора  $B$  в (8) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора  $A$  в (7). При построении  $B$  исходили из аддитивного представления оператора  $A_0$  – симметричной части оператора  $A$ :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \quad (9)$$

где  $A = A_0 + A_1$ ,  $A_0 = A_0^*$ ,  $A_1 = -A_1^*$ .

Оператор преобуславливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad (10)$$

где  $D$  – некоторый оператор.

Соотношения (9)-(10) задают модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) решения задачи, если определены операторы  $R_1, R_2$  и указаны способы определения параметров  $\tau_{m+1}$ ,  $\omega$  и оператора  $D$ .

Алгоритм адаптивного модифицированного попеременно – треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором имеет вид:

$$r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m)w^m = r^m, \quad \tilde{\omega}_m = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}}, \quad (11)$$

$$s_m^2 = 1 - \frac{(A_0w^m, w^m)^2}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)(Bw^m, w^m)}, \quad k_m = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad \theta_m = \frac{1 - \sqrt{\frac{s_m^2 k_m}{(1 + k_m)}}}{1 + k_m (1 - s_m^2)},$$

$$\tau_{m+1} = \theta_m \frac{(A_0w^m, w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m, \quad \omega_{m+1} = \tilde{\omega}_m,$$

где  $r^m$  - вектор невязки,  $w^m$  - вектор поправки, в качестве оператора  $D$  используется диагональная часть оператора  $A$ .

## 5. Многопроцессорная вычислительная система ТТИ ЮФУ

Пиковая производительность МВС составляет 18.8 TFlops. МВС включает в себя 8 компьютерных стоек (рис.1). Вычислительное поле многопроцессорной вычислительной системы (МВС) ТТИ ЮФУ построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3GHz и оперативной памятью в объеме 32ГБ.

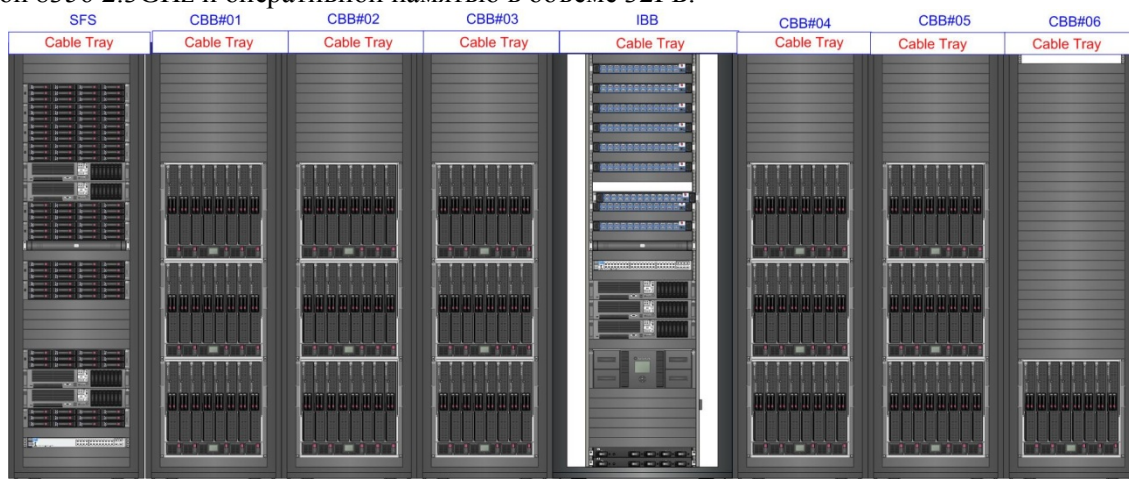


Рис. 1 Многопроцессорная Вычислительная Система

Общее количество вычислительных ядер в комплексе – 2048, суммарный объем оперативной памяти – 4 ТВ. Для управления МВС используется 3 управляющих сервера HP ProLiant DL385G5. Для задач резервного копирования используется библиотека MSL4048.

## 6. Параллельный вариант алгоритма решения сеточных уравнений

Идея параллельного алгоритма метода решения сеточных уравнений заключается в следующем. После разбиения исходной расчетной области на части по двум координатным направлениям каждый процессор получает свою расчетную область, как показано на рис.2, при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения.

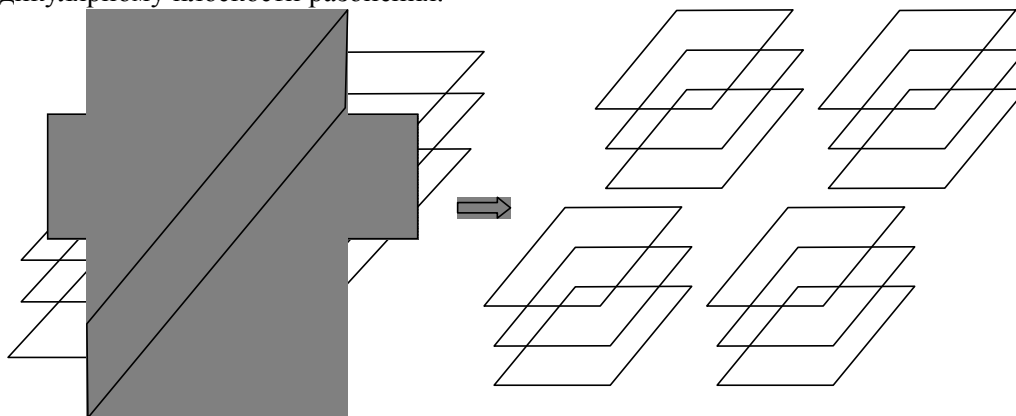


Рис 2. Декомпозиция области.

После того как каждый процессор получит информацию для своей части области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальный по модулю элемент вектора невязки и передает его значение каждому процессору. Теперь для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальный элемент.

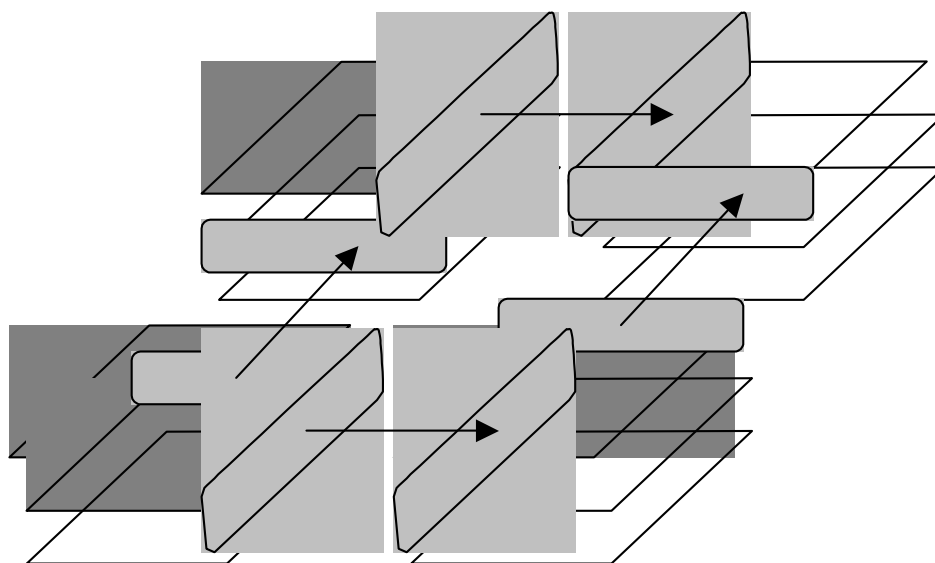
Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

$$(D + \omega_m R_1) D^{-1} (D + \omega_m R_2) w^m = r^m,$$

где  $R_1$  – ниже-треугольная матрица, а  $R_2$  – выше-треугольная матрица. Для этого решим последовательно системы:

$$(D + \omega_m R_1) y^m = r^m, \quad (D + \omega_m R_2) w^m = D y^m.$$

Вначале вычисляется вектор  $y^m$ , при этом расчет начинается в левом нижнем углу. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки  $w^m$ . Схема расчета вектора  $y^m$  изображена на рис. 3.



**Рис 3.** Схема для расчета вектора  $y^m$  (Показана передача элементов после расчета двух слоев первым процессором).

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи – первый. Передача элементов после расчета двух слоев первым процессором показана на рис 3. В схеме для расчета вектора  $y^m$  только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций, для узлов сетки, располагающихся в предшествующих позициях данной строки. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои. Аналогичным образом можно решить СЛАУ с верхне-треугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения (11) и выполняется переход на следующий итерационный слой.

Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Зависимость ускорения и эффективности от количества процессоров.

Количество процессоров	Время, с.	Ускорение	Эффективность
1	7,490639	1	1
2	4,151767	1,804	0,902
4	2,549591	2,938	0,734
8	1,450203	5,165	0,646
16	0,882420	8,489	0,531
32	0,458085	16,351	0,511
64	0,265781	28,192	0,44
128	0,171535	43,668	0,341

Из таблицы видно, что алгоритм попеременно - треугольного итерационного метода и его параллельная реализация на основе декомпозиции по двум пространственным направлениям могут эффективно применяться для решения задач гидродинамики при достаточно большом числе вычислителей ( $p \leq 128$ ).

На основании данных, полученных экспериментальным путем, были вычислены времена, затраченные на накладные расходы параллельного алгоритма, в том числе:

$t_0 \approx 2 \cdot 10^{-9} c$  - среднее время выполнения полезной операции;

$t_x \approx 5 \cdot 10^{-7} c$  - среднее время отклика (латентность);

$t_n \approx 4 \cdot 10^{-8} c$  - среднее время, затрачиваемое на передачу чисел с плавающей точкой.

Получены теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ вариационного типа в случае декомпозиции области по одному и двум пространственным направлениям [10]. Алгоритмы, основанные на декомпозиции области по двум направлениям, эффективны для больше количества вычислительных элементов по сравнению с алгоритмами, использующими декомпозицию по одному пространственному направлению, т.к. требуют меньшего объема передач. В случае равного числа разбиений по двум координатным направлениям теоритические оценки ускорения и эффективности примут вид:

$$A_{\text{уск}} = \frac{n}{1 + \frac{2n(\sqrt{n}-1)}{25t_0} \left( \frac{9t_0}{N_z n} + \frac{N_x + N_y}{N\sqrt{n}} t_n + \frac{t_x}{N} \right) + \frac{2n}{25t_0} \left( t_n \left( \frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} \right) + \frac{t_x \sqrt{n}}{N_x N_y} \right)},$$

$$E_{эф} = \frac{A_{уск}}{n} = \frac{1}{1 + \frac{2n(\sqrt{n}-1)}{25t_0} \left( \frac{9t_0}{N_z n} + \frac{N_x + N_y}{N\sqrt{n}} t_n + \frac{t_x}{N} \right) + \frac{2n}{25t_0} \left( t_n \left( \frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} \right) + \frac{t_x \sqrt{n}}{N_x N_y} \right)},$$

где  $n$  - количество вычислительных узлов,  $N_x, N_y, N_z$  - размеры расчетной области. Число разбиений по каждому из координатных направлений равно  $\sqrt{n}$ .

На рис. 4 изображены графики зависимости ускорения от количества процессоров, рассчитанные теоретически и экспериментально.

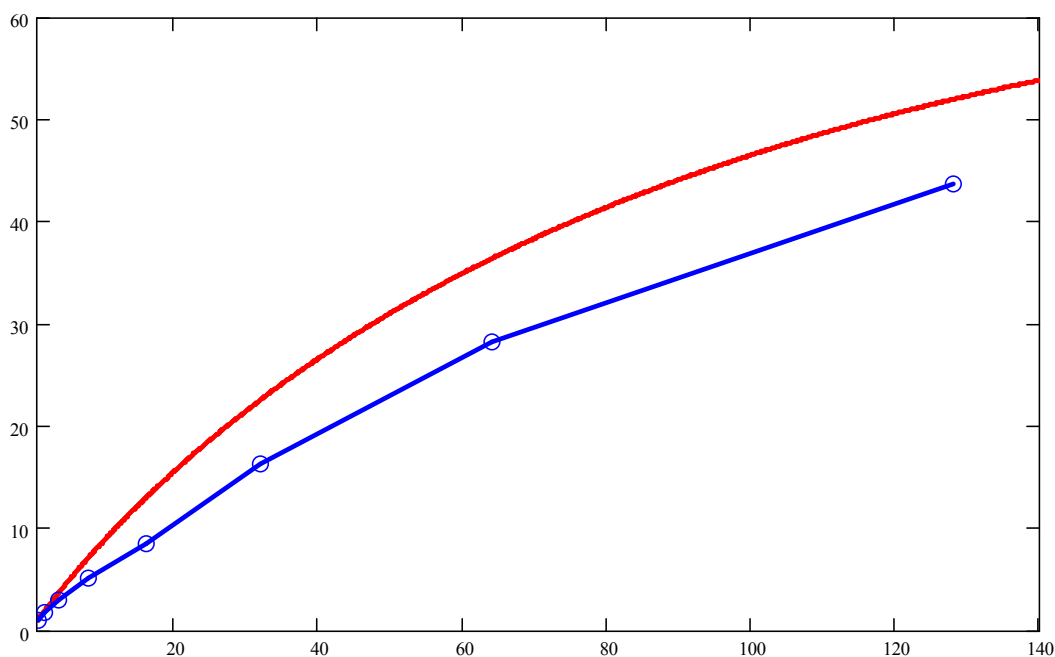


Рис 4. Зависимости ускорения от числа процессоров. Гладкая кривая – теоретическая зависимость, ломаная – экспериментальная.

В теоретических оценках ускорения рассматривается случай модельной задачи с прямоугольной областью. При решении задачи для реального водоема расчетная область имеет сложную форму. При этом реальное ускорение меньше его теоретической оценки. Из рис 4 видно, что обе кривые проходят достаточно близко друг к другу, т.е. зависимость ускорения, полученную при теоретической оценке, можно использовать в качестве оценки сверху для ускорения при параллельной реализации алгоритма ПТМ вариационного типа путем декомпозиции области по двум пространственным направлениям.

## 7. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты на основе выше описанной математической модели гидродинамических процессов производились на сетке размерностью 351x251x14 для Азовского моря. Построены распределения течений в Азовском море. В таблице 2 представлены данные водного баланса.

Таблица 2. Данные водного баланса в Азовском море.

Гирла <sup>1</sup> Свиное, Кривое и Богдан	+82 м <sup>3</sup> /с
Гирло Песчаное	+199 м <sup>3</sup> /с
Гирло Мериновое	+105 м <sup>3</sup> /с

<sup>1</sup> Гірло (укр. происхождения) – название рукава или протоки в дельтах крупных рек, впадающих в Чёрное и Азовское моря.



Гирло Мокрая Кутерьма	+185 м <sup>3</sup> /с
Гирло Кутерьма	+424 м <sup>3</sup> /с
Гирла Мертвый Донец и Средняя Кутерьма	+390 м <sup>3</sup> /с
Кубань	+923 м <sup>3</sup> /с
Черное море	-1587 м <sup>3</sup> /с
Сиваш	-115 м <sup>3</sup> /с
Испарение	-606 м <sup>3</sup> /с

Приведем результаты численных экспериментов для Азовского моря (баротропные течения) (см. рис. 5 – рис. 6). Палитрой показана интенсивность течения.

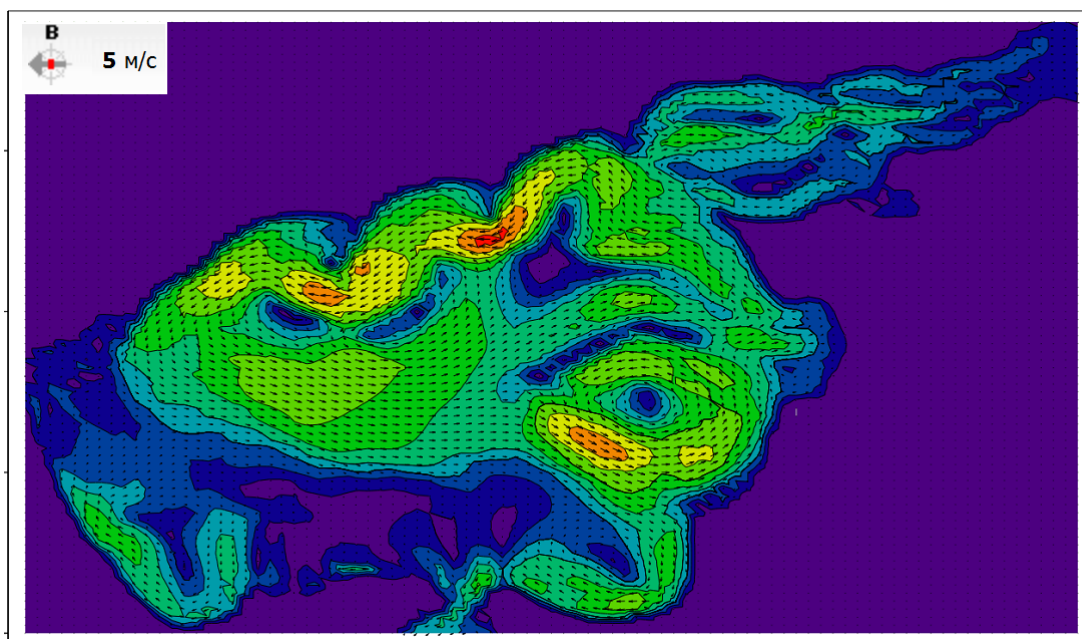


Рис.5. Поле вектора скорости движения водной среды при восточном ветре 5 м/с (баротропные течения)

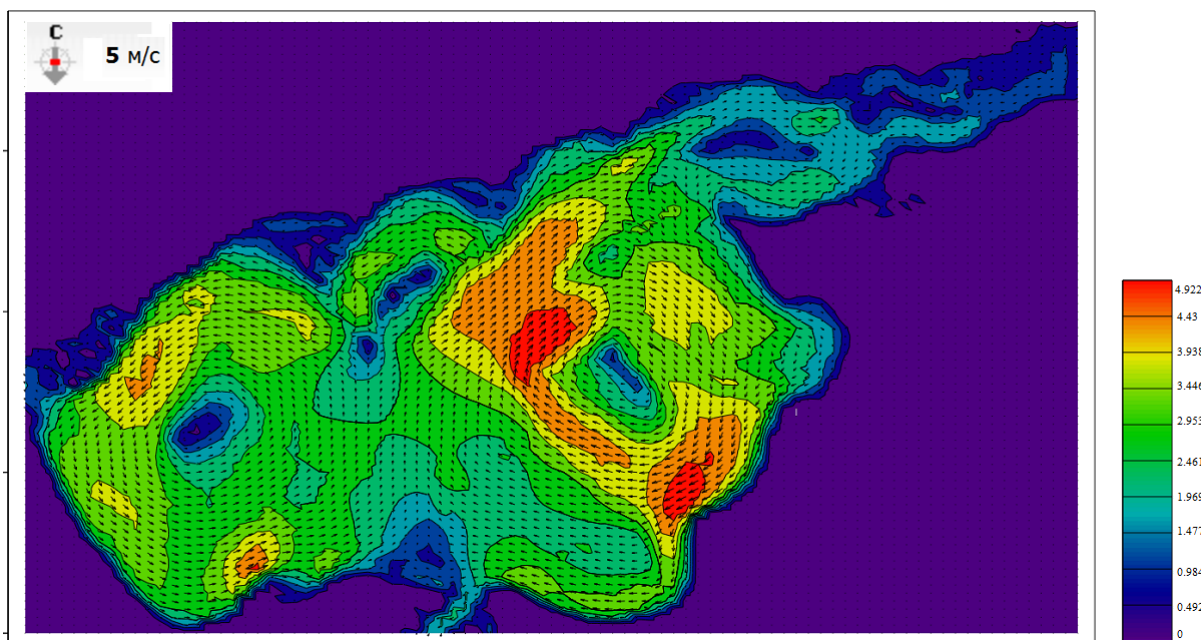


Рис.6. Поле вектора скорости движения водной среды при северном ветре 5 м/с (баротропные течения)

При наличии замкнутого вихревого движения среды значительное количество органических веществ попадает в захват этого района и, опускаясь на дно, образует органический осадок, что приводит к появлению участков анаэробного заражения. На рис. 5 – 6 видно наличие вихревой структуры течения в восточной части Азовского моря, в данном районе вода богата органическими примесями, источниками которых являются реки Дон и Кубань.

## Заключение

Работа посвящена построению дискретной математической модели для расчета полей скоростей применительно к прибрежным системам и мелководным водоемам, таким как Азовское море. Отличительными особенностями разрабатываемых алгоритмов являются: высокая производительность, достоверность и точность получаемых результатов. Высокая производительность достигается за счет использования эффективных численных методов решения сеточных уравнений, ориентированных для применения на параллельных вычислительных системах в реальном и ускоренном масштабах времени. Достоверность достигается за счет учета определяющих физических факторов, таких как: сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, динамическое перестроение расчетной области, ветровые напряжения и трение о дно, а также за счет учета отклонения значения поля давления от гидростатического приближения. Точность достигается применением подробных расчетных сеток, учитывающих степень «заполненности» расчетных ячеек, а также отсутствием неконсервативных диссипативных слагаемых и нефизичных источников (стоков), возникающих в результате конечно-разностных аппроксимаций. Также в работе показана эффективность алгоритма адаптивного попеременно - треугольного итерационного метода и его параллельной реализации, выполненной на основе декомпозиции области по двум пространственным направлениям, применительно к решению задач гидродинамики мелководных водоемов при достаточно большом количестве вычислителей.

## Литература

1. Сухинов А.И., Якушев Е.В. Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна «Акванавт» // Океанология, 2003, т. 43, №1, с.44-53.
2. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе// Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 3. – С.3-21.
3. Чистяков А.Е. Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла// Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. №8(97). С 75-82.
4. Белоцерковский О.М. Турбулентность: новые подходы - М.: Наука, 2003
5. Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В.. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 15:1 (1975). 197–207.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука, 1989.
7. Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф. Чистяков А.Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов// Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. №8(121). С 22-32.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. Наука, 1978.
9. Коновалов А.Н. К теории попеременно - треугольного итерационного метода// Сибирский математический журнал. 2002. 43:3. С. 552-572.
10. Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска// Известия ЮФУ. Технические науки.– . 2010, №6(107). С 237-249.