Параллельный алгоритм оптимизации динамических систем с управлением

О.В. Фесько

При исследовании различных динамических систем с управлением большое значение имеет поиск простых оптимальных законов управления, реализуемых на практике. Предложен параллельный алгоритм поиска решения задачи оптимального управления в виде кусочно-линейной функции.

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \ \ t \in [t_0, t_1]\,, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_l(t), l = \overline{1, n}$ – кусочно-дифференцируемы, управление $u(t)$ – кусочно-линейно, т. е.

$$u(t) = \frac{(w_{2i+1} - w_{2i})\,t - (\tau_i w_{2i+1} - \tau_{i+1} w_{2i})}{\tau_{i+1} - \tau_i}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\,, i = \overline{0, m},$$

где m — число точек переключения,

$$w_- \le w_i \le w_+, w_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, 2m+1},$$

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{m+1} = t_1, m \ge 0, m \in \mathbb{Z},$$

с критерием качества

$$F\,(x(t_1)) \to \min\,. \tag{2}$$

Доказано, что исходную задачу (1), (2) можно свести к задаче условной минимизации дифференцируемой функции многих переменных $F\,(x(t_1)) = F(x(t_1; w)) = G\,(w)$ на множестве $W = \left\{w \in \mathbb{R}^{\mathbf{2m+2}} : w_- \le w_i \le w_+, i = \overline{0, 2m+1}\right\}$.

Алгоритм решения исходной задачи (1), (2) представляет собой чередование численного алгоритма решения задачи Коши (адаптивный метод Рунге-Кутта) и алгоритма минимизации многомерной функции $G(w)$ (модифицированный градиентный метод).

Программы минимизации многомерных многоэкстремальных функций и решения задачи оптимального управления были реализованы на языке Т++, т. к. вариант программ на С++ естественным образом ориентирован на параллельные вычисления.

Гранулой параллелизма в данных задачах был выбран непосредственно градиентный метод (независимый поиск минимума в подобластях).

В таблице 1(а) и 1(б) представлены результаты ускорения программы поиска минимумов функции типа «вулканическая поверхность» (при разбиении на 256 подобластей) и решения одной задачи оптимального управления с двумя точками переключения (при разбиении на 32 подобласти) соответственно. Время расчета заметно сокращается при увеличении числа узлов.

Таблица 1. Анализ эффективности параллельных версий программ

	Число узлов, p	1	2	4	6	8	10	12
(а)	Время, t_p	3260.603	1761.937	951.696	727.518	660.907	658.951	461.422
	Ускорение, t_1/t_p	1	1.85	3.43	4.48	4.93	4.95	7.07

	Число узлов, p	1	2	4	6	8	10	12
(б)	Время, t_p	2182.976	1319.838	826.408	526.569	454.782	412.992	352.079
	Ускорение, t_1/t_p	1	1.65	2.64	4.15	4.8	5.29	6.2