

# Применение параллельных алгоритмов при решении задач гидродинамики методом вихревых элементов \*

И.К. Марчевский, Г.А. Щеглов

Рассматривается параллельный алгоритм расчета методом вихревых элементов пространственного обтекания тел дозвуковым потоком среды. Традиционно в задачах такого типа распараллеливается только процедура вычисления взаимных влияний вихревых элементов, аналогичная задаче  $N$  тел. В настоящей работе проанализирована трудоемкость всех операций алгоритма и показано, что их распараллеливание позволяет существенно повысить скорость счета. Исследована эффективность распараллеливания вычислений при использовании различных вычислительных систем. Приведены результаты численного моделирования.

## 1. Введение

В инженерной практике часто требуется исследовать взаимодействие элементов конструкций с дозвуковым потоком среды. Такие задачи возникают в авиации при проектировании летательных аппаратов, в промышленной аэродинамике при расчете ветровой нагрузки на здания и сооружения, в области экологии при исследовании распространения загрязнения и различных примесей, в электроэнергетике при проектировании ветроэнергетических установок и исследовании колебаний проводов на воздушных линиях электропередачи. В настоящее время в связи с интенсивным развитием компьютерной техники появилась возможность проведения относительно дешевого численного эксперимента методами вычислительной гидродинамики. Это позволяет сократить количество дорогостоящих экспериментов в аэродинамических трубах. Распространение суперкомпьютерных технологий, предоставляющих пользователю возможность использования многих вычислительных ядер, позволяет существенно сократить время расчета за счет использования библиотек параллельных вычислений, таких как MPI [1].

Хотя суперкомпьютерные технологии широко доступны пользователям на протяжении как минимум последнего десятилетия, их практическое использование для решения прикладных задач осложняется необходимостью создания эффективных параллельных алгоритмов. Это связано с тем, что далеко не для всех численных методов можно предложить простой способ распараллеливания. В вычислительной гидродинамике чаще всего используются сеточные методы решения уравнений движения среды. Данные методы обладают многими преимуществами и позволяют решать широкий спектр задач, однако с точки зрения затрат вычислительных ресурсов они уступают бессеточным методам, в которых вместо расчета характеристик течения в узлах сетки рассматривается движение множества частиц [2, 3]. Частица — вихревой элемент — переносит завихренность, индуцирующую в окружающем пространстве скорость по закону Био-Савара. Таким образом, каждый вихревой элемент оказывает влияние на поле скоростей во всем пространстве, а суммарное поле скоростей находится как сумма влияний всех вихревых элементов. По известным положениям вихревых элементов можно также вычислить давление в любой точке течения. Область течения, занятая завихренностью — так называемый вихревой след, — как правило, достаточно компактна, поэтому при расчете параметров течения методом вихревых элементов вычислительные ресурсы концентрируются именно в этой области, а не “распыляются” по всей сетке, которая при решении задач внешнего обтекания строится в области, намного превышающей размеры вихревого следа [4].

Целью настоящей работы является изучение возможности эффективного распараллеливания алгоритма решения задач вычислительной гидродинамики методом вихревых эле-

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-08-00657-а.

ментов. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: оценка трудоемкостей отдельных операций алгоритма метода вихревых элементов, создание программного комплекса для проведения расчета на многопроцессорных вычислительных комплексах и оценка его производительности на различных вычислительных системах.

## 2. Метод вихревых элементов в задаче расчета пространственного обтекания тел

### 2.1. Постановка задачи

Течение несжимаемой среды ( $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ ) постоянной плотности  $\rho$  описывается уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nu \Delta \mathbf{V} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right),$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость среды,  $p$  — давление,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. На бесконечном удалении от обтекаемого тела выполняется граничное условие затухания возмущений

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_\infty, \quad p \rightarrow p_\infty,$$

а на поверхности неподвижного обтекаемого тела  $K$  — условие прилипания

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in K.$$

Для приближенного моделирования течения используется подход Прандтля — считается, что влияние вязкости существенно лишь вблизи поверхности обтекаемого тела. Вне этого слоя среда считается идеальной, и ее течение описывается уравнением Эйлера, которое можно представить в форме Гельмгольца [5]

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V}. \quad (1)$$

Это уравнение описывает движение завихренности  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$  в области течения, при этом скорость среды может быть восстановлена по известному полю завихренности при помощи закона Био-Савара ( $d = 2$  для плоскопараллельных и  $d = 3$  для пространственных течений):

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \frac{1}{2(d-1)\pi} \int \frac{d\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^d}. \quad (2)$$

Образование новой завихренности происходит вблизи поверхности обтекаемого тела под влиянием вязкости. В простейшем случае действие вязкости можно рассматривать лишь как причину генерации завихренности у поверхности тела, в этом случае ее интенсивность находится из условия непротекания на поверхности тела

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in K, \quad (3)$$

а вся образующаяся завихренность становится частью вихревого следа, что обеспечивает выполнение условия прилипания, равносильное заданию определенного потока завихренности с поверхности тела в область течения [6].

По известному полю завихренности, используя аналог интеграла Коши-Лагранжа [7], можно вычислить давление в любой точке и найти нагрузки, действующие на обтекаемое тело.

## 2.2. Метод вихревых элементов

При заданном начальном распределении завихренности  $\Omega$  задача моделирования обтекания тела сводится к уравнениям (1)–(3), которые могут быть эффективно решены методом вихревых частиц [3]. Под вихревой частицей понимается элементарное поле завихренности, связанное с некоторым маркером  $\mathbf{r}_i$ , имеющее интенсивность  $\Gamma_i$  и характеризующееся вектором параметров  $\boldsymbol{\omega}_i$ . Интенсивности, положения и остальные параметры вихревых частиц задаются так, чтобы аппроксимировать поле завихренности  $\Omega$ . Если интеграл в (2) для каждой вихревой частицы можно представить достаточно простым аналитическим выражением, то вихревая частица называется вихревым элементом (ВЭ), а поле скоростей (2) представляется суперпозицией полей скоростей  $N$  отдельных ВЭ [3]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \Gamma_i. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$  — влияние в точке  $\mathbf{r}$  от  $i$ -го ВЭ.

На каждом шаге расчета вблизи поверхности обтекаемого тела происходит генерация  $N_0$  новых ВЭ, интенсивности  $\Gamma_j^0$  которых находятся из (3) с учетом (4):

$$\mathbf{n} \cdot \sum_{j=1}^{N_0} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0, \boldsymbol{\omega}_j^0) \Gamma_j^0 = -\mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \Gamma_i \right). \quad (5)$$

Для определения интенсивностей  $\Gamma_j^0$  уравнение (5) записывается в контрольных точках  $\mathbf{r}_k$ , задаваемых на поверхности тела  $K$ , что приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{n} \cdot \sum_{j=1}^{N_0} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j^0, \boldsymbol{\omega}_j^0) \Gamma_j^0 = -\mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \Gamma_i \right), \quad k = 1, \dots, N_0. \quad (6)$$

Уравнение (1) при использовании ВЭ приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i), \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i), \quad (7)$$

где  $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)$  — скорость движения маркера ВЭ по траектории жидкой частицы,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$  — скорость изменения параметров ВЭ.

Для реализации метода вихревых элементов необходимо выбрать тип вихревого элемента, который определяет характеристики ВЭ —  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\Gamma$ , и вид функций  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ . В качестве ВЭ в данной работе используется симметричный вортон-отрезок [8].

## 2.3. Алгоритм расчета методом вихревых элементов

Алгоритм расчета течения методом вихревых элементов (МВЭ) состоит из пяти основных операций, которые выполняются на каждом шаге расчета.

1. Формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений (6) для удовлетворения граничных условий на поверхности обтекаемого тела с последующим увеличением числа ВЭ в вихревой пелене ( $N := N + N_0$ ).
2. Вычисление правых частей системы (7), в частности, скоростей вихревых элементов по формуле (4)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{s=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s, \boldsymbol{\omega}_s) \Gamma_s, \quad i = 1, \dots, N.$$

3. Вычисление нагрузок, действующих на тело со стороны потока, по рассчитанному полю скоростей [7].
4. Решение системы ОДУ (7) на текущем шаге расчета, перемещение ВЭ в новые положения и предотвращение проникновения ВЭ внутрь тела вследствие погрешностей дискретизации.
5. Реструктуризация вихревой пелены, приводящая к уменьшению числа ВЭ на  $N_R$  элементов за счет объединения близкорасположенных ВЭ или исключения из расчетной схемы ВЭ, удалившихся от тела на значительное расстояние ( $N := N - N_R$ ).

Критерием остановки расчета является выполнение заданного числа временных шагов.

### 3. Оценка трудоемкостей различных операций алгоритма

Рассмотренный выше алгоритм имеет следующую особенность: на каждом шаге происходит изменение числа ВЭ (в операциях 1 и 5 алгоритма). Точность расчета напрямую зависит от  $N_0$ , а скорость счета — от квадрата текущего числа ВЭ ( $N^2$ ). Это определяется необходимостью вычислений попарных влияний ВЭ друг на друга в операциях 2 и 5 алгоритма. Трудоемкость операций 3 и 4 — порядка  $N \cdot N_0$ .

Увеличение числа  $N$  вихревых элементов, моделирующих след за обтекаемым телом, при выполнении расчета на одном вычислительном ядре приводит к росту времени выполнения каждого последующего шага расчета, как показано в таблице 1. Начиная с некоторого шага расчета, процедура реструктуризации вихревой пелены позволяет стабилизировать число вихревых элементов ( $N_R \approx N_0$ ), которое затем изменяется мало.

Таблица 1. Время выполнения одного шага расчета

Номер шага	40	90	160	300 и далее
Число ВЭ	2000	2500	3000	3500
Время выполнения шага расчета, с	8,6	10,1	12,1	13,8

Отметим, что данный расчет производился на одном ядре вычислительного кластера. Использование более мощных процессоров позволяет сократить абсолютное время счета, однако замедление расчета с увеличением числа ВЭ будет происходить с тем же темпом.

Относительные трудоемкости операций алгоритма в зависимости от числа вихревых элементов в следе представлены на рис. 1. Операция 2 является доминирующей. При увеличении числа вихревых элементов ее доля возрастает.

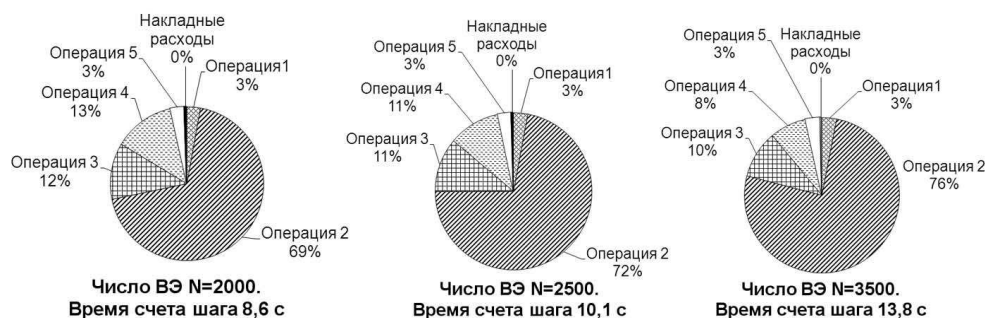
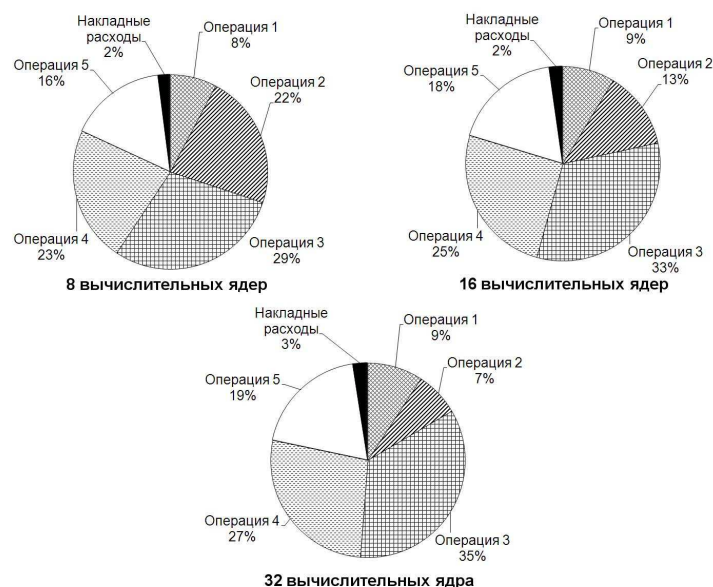


Рис. 1. Относительные трудоемкости операций при расчете без распараллеливания

Однако, если распараллеливать только операцию 2, а остальные операции выполнять на одном вычислительном ядре, как это часто делается при реализации вихревых методов, то получить высокую эффективность распараллеливания, особенно при использовании большого числа вычислительных ядер, не удастся. Это связано с тем, что очень быстро начинают доминировать затраты на выполнение остальных операций, во время которых большинство вычислительных ядер будут простаивать. На рис. 2 для алгоритма, в котором распараллелена только операция 2, показаны диаграммы трудоемкостей операций при использовании различного числа вычислительных ядер.



**Рис. 2.** Относительные трудоемкости при распараллеливании операции 2

Наибольшего эффекта от распараллеливания можно достичь при сохранении соотношения трудоёмкостей различных операций с увеличением количества вычислительных ядер. На рис. 3 приведены аналогичные диаграммы для алгоритма, в котором распараллелены все операции.

В таблице 2 приведены затраты времени при выполнении одного шага расчета параллельного алгоритма при использовании разного числа вычислительных ядер.

**Таблица 2.** Время выполнения одного шага расчета с использованием параллельного алгоритма

Номер шага	40	90	160	300 и далее
Число ВЭ	2000	2500	3000	3500
$T_{\text{шага}}$ , с (1 ядро)	8,6	10,1	12,1	13,8
$T_{\text{шага}}$ , с (2 ядра)	4,5	5,4	6,5	7,4
$T_{\text{шага}}$ , с (4 ядра)	2,4	2,8	3,4	3,9
$T_{\text{шага}}$ , с (8 ядер)	1,3	1,5	1,8	2,1
$T_{\text{шага}}$ , с (16 ядер)	0,8	1,0	1,1	1,3
$T_{\text{шага}}$ , с (24 ядра)	0,7	0,8	0,9	1,0

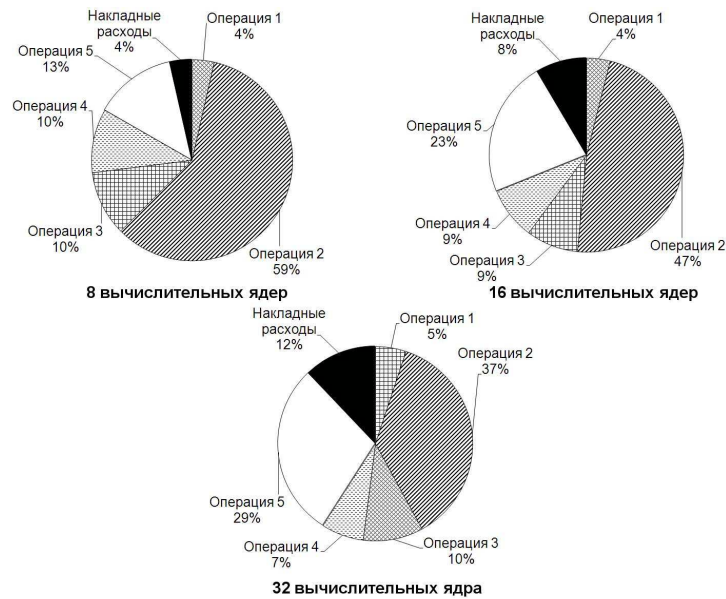


Рис. 3. Относительные трудоемкости при распараллеливании всех операций

#### 4. Оценка эффективности различных вычислительных систем

Эффективность распараллеливания вычислений в МВЭ связана не только с совершенством параллельного алгоритма, но и с возможностями многопроцессорных вычислительных комплексов. Для оценки ускорения расчета использовались как персональные ЭВМ, объединенные в локальную сеть, так и высокопроизводительные кластерные системы, в частности МВС-100К и МВС-6К МСЦ РАН, а также кластерная система HP BLc3000 Twt STO Enclosure на базе 2-х блейд серверов HP ProLiant 2xBL220c, полученная МГТУ им. Н.Э. Баумана в рамках программы “Университетский кластер” [9]. Сравнение ускорения счета одного и того же алгоритма МВЭ для различных вычислительных комплексов представлено на рис. 4.

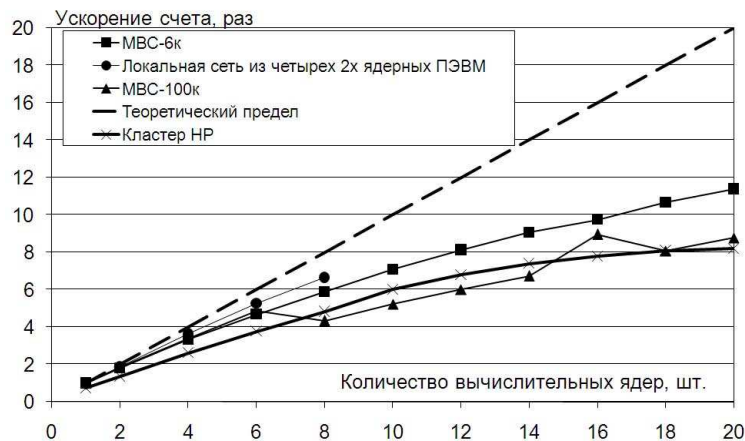


Рис. 4. Ускорение расчетов при использовании различных многопроцессорных систем

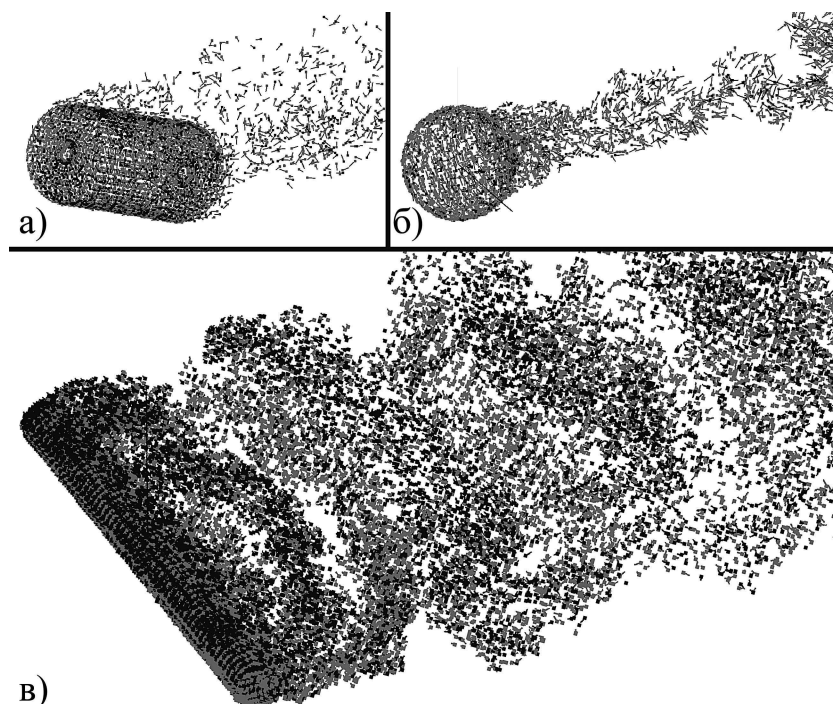
Видно, что при малом числе вычислительных ядер удается достичь практически линейного ускорения, что доказывает хорошую масштабируемость разработанного параллельного алгоритма. Кажущееся преимущество локальной вычислительной сети является относительным: абсолютное время счета на ПЭВМ превышает время счета на кластерах.

Эффективность распараллеливания при использовании большого числа ядер (более 16) снижается, это может объясняться возрастающими объемами межпроцессорного обмена и ростом доли “накладных расходов”.

## 5. Примеры расчетов

Описанный алгоритм реализован авторами в программном комплексе MVE3D с использованием библиотеки параллельных вычислений MPI.

На рис. 5 показан вид вихревых пелен за телами простейшей формы, образуемых симметричными вихрями-отрезками в ходе моделирования нестационарного обтекания.



**Рис. 5.** Вихревые следы за телами простейшей формы: а — цилиндр с удлинением 2; б — шар; в — цилиндр с удлинением 12;

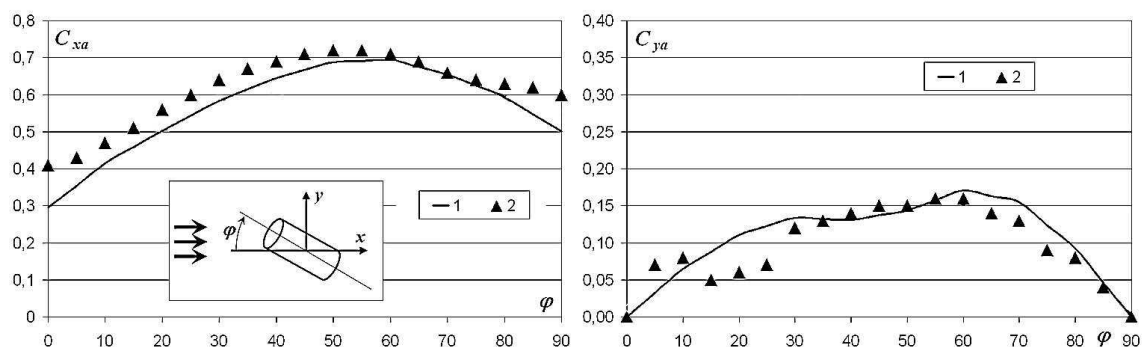
Высокая скорость расчетов, обеспечиваемая за счет использования параллельных алгоритмов, позволяет рассчитывать не только нестационарные переходные режимы обтекания, но и достаточно быстро проводить расчеты “на установление” до тех пор, пока обтекание не выходит на стационарный режим.

На рис. 6 показаны результаты расчета стационарных аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы для кругового цилиндра с удлинением, равным  $l/d = 2$ , в сравнении с экспериментальными данными [10].

## 6. Выводы

Применение параллельных алгоритмов метода вихревых элементов, реализованных с использованием библиотеки параллельных вычислений MPI, позволило значительно ускорить выполнение расчетов и эффективно использовать различные современные вычислительные системы. При проведении расчетов на многопроцессорных кластерах удалось увеличить число вихревых элементов в расчетной схеме, повысив тем самым точность вычислений, при сохранении высокой скорости счета.

Авторы благодарят Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН за предостав-



**Рис. 6.** Стационарные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы: 1 — эксперимент [10]; 2 — расчет по программе MVE3D

ленную возможность использования кластеров MBC-100K и MBC-6000IM, а также программу “Университетский кластер”.

## Литература

1. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 424 с.
2. Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы / Под ред. С.М. Белоцерковского. — М.: ЦАГИ, 2000. — 265 с.
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. Vortex methods: theory and practice // Cambridge University Press, 2000. — 465 с.
4. Сарпкаяя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. А. — 1989. — № 10. — С. 1-60.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
6. Lighthill M.J. Introduction // Boundary Layer Theory / J. Rosenhead, ed. — New York: Oxford University Press, 1963. — P.54–61.
7. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. — 184 с.
8. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Модель симметричного вортон-отрезка для численного моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. — 2008. — № 4. — С. 62–71.
9. Институт системного программирования РАН — Программа “Университетский кластер”: [<http://www.ispras.ru/ru/unicluster/>], 14.12.2009.
10. Девнин С.И. Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций. — Л.: Судостроение, 1983. — 320 с.