Параллельное вычисление присоединенной матрицы.

А.А. Бетин

Задача обращения плотных и разреженных матриц – одна из самых распространенных задач параллельного программирования. Однако, с ростом размеров матриц накопление ошибок тоже растет и для некоторых задач эта проблема становится катастрофической.

Мощности параллельных вычислительных систем позволяют сегодня подойти к проблеме накопления ошибок с другой стороны. Можно строить параллельный алгоритм с точными вычислениями. Также как в числовых параллельных алгоритмах, преимущество будет у блочных, рекурсивных алгоритмов, в которых не требуется выборка ведущего элемента на каждом шаге.

Проблема получения блочных рекурсивных алгоритмов была изучена S. Watt, [1]. Он представил алгоритм, который основан на равенстве несингулярных матриц $A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$. Здесь A^T транспонированная матрица к матрице A, у матрицы $A^T * A^{-1}$ обратимы все главные миноры.

Вычисление обратной матрицы может быть осуществлено на основе присоединенной матрицы. Присоединенная матрица - это транспонированная матрица алгебраических дополнений. Если детерминант матрицы обратим, то обратная матрица может быть вычислена как присоединенная матрица, деленная на детерминант.

Алгоритм вычисления присоединенной матрицы основн на разложении на множители обратной матрицы. Если $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ – обратимая матрица и A ее обратимый блок, то можно разложить на множители ее обратную матрицу $\mathcal{A}^{-1}$ [2]:

$$\begin{bmatrix} (I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (D - BA^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Применение детерминантных тождеств позволяет вычислять присоединенную матрицу с помощью аналогичного разложения присоединенной матрицы [3].

Алгоритм является рекурсивным. Графом алгоритма является дерево.

Граф алгоритма состоит из вершин пяти типов:

1 - главная вершина - корневая вершина дерева алгоритма $(A, S, E_s, d) = A_{ext}(M, d_0)$;
2 - вершина типа $A * B$;
3 - вершина типа $\frac{A*B}{d_1} d_0$;
4 - вершина типа $AB + CD$;
5 - вершина типа $\frac{A*B}{d_1} d_0 + \frac{C*D}{d_1} d_0$, где A, B,C,D матрицы, d_0, d_1 числа.

Все деревья исходящие из вершины разбиты на пучки. Деревья в одном пучке вычисляются параллельно, пучки пронумерованы и вычисляются в соответствии со своими номерами. Пучок из одного дерева - это вычислительный блок в вершине.

Результатом вычислений являются: A – присоединенная матрица, d – определитель.

Литература

1. Watt S.M. Pivot-Free Block Matrix Inversion.

2. Strassen V. Gaussian Elimination is not optimal // Numerische Mathematik. 1969. V.13.P.354-356.

3. Малашонок Г.И. Матричные методы вычислений в коммутативных кольцах. // Монография. Тамбов: Изд-во ТГУ им. Г.Р. Державина, 2002. 214 с. С.78-82.