Распределение процессорного времени посредством последовательного аукциона второй цены при неделимых спросах

С.В. Бредихин, И.А. Голдобин, А.Б. Хуторецкий

Рассматривается задача распределения фиксированного объема платного ресурса (например, процессорного времени) при следующих предположениях: поставщик ресурса имеет линейную функцию затрат; каждый потребитель имеет фиксированную потребность и неделимый спрос (количество ресурса, превышающее потребность, не увеличивает полезность, а меньшее дает нулевую полезность).

Модель рынка. Есть N пользователей, каждый из которых хочет решить одну задачу. Задача k требует Q_k единиц ресурса (процессорного времени). Предположим, что пользователь k имеет денежную оценку B_k той полезности, которую получит вследствие решения своей задачи. Будем считать, что B_k — это бюджет задачи, то есть максимальная сумма, которую пользователь k согласен заплатить за ее решение. Пользователь выбирает потребительский набор $(q, m)\in R^2_+$, где q — количество ресурса, m — платеж за ресурс в объеме q. Пользователь k имеет на множестве потребительских наборов функцию полезности

$$U_k(q,m) = B_k - m, \text{ если } q \geq Q_k; \text{ иначе } U_k(q,m) = -m.$$

Это значит, что пользователь не получает дополнительной полезности от избыточного (сверх Q_k) ресурса и частичное решение задачи дает ему нулевую полезность. Если цена ресурса равна p, то $m = qp$ и функция полезности принимает вид

$$u_k(q,p) = B_k - qp, \text{ если } q \geq Q_k; \text{ иначе } U_k(q,m) = -qp.$$

Спрос пользователя k может принимать только два значения: Q_k и 0 (неделимость спроса).

Поставщик ресурса (единственный) имеет Q единиц ресурса и удельные эксплуатационные затраты $c \geq 0$. Он максимизирует прибыль, которая при цене p и предложении q равна $(p - c)q$. Ясно, что при $p > c$ предложение максимально и равно Q, при $p < c$ предложение равно нулю, а при $p = c$ поставщику безразлично, какое количество ресурса $q\in[0; Q]$ предложить.

Механизм распределения ресурса (аукцион). Заявка пользователя k указывает, что он готов купить ресурс в количестве q_k по цене, не превосходящей p_k. Упорядочим заявки по невозрастанию цен p_k: $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_N$. Пусть $n = \max\{k \mid p_k \geq c\}$. Только пользователи с номерами $k \leq n$ являются участниками аукциона. Пусть $m = \max\{k \mid k \leq n \text{ и } \Sigma_{i \leq k}\, q_k \leq Q\}$. Участники с номерами $k \leq m$ являются „победителями" аукциона, каждый из них получает заявленное количество ресурса, а остальные участники не получают (и не платят) ничего. Победители платят по единой цене p^*, которая равна заявленной цене первого „вытесненного" пользователя, если ресурс дефицитен, в противном случае она равна цене продавца. Таким образом, акцион определяет единую цену ресурса, которая приемлема для всех обслуживаемых потребителей.

В работе доказано, что механизм неманипулируем по обеим компонентам заявки, то есть пользователь не может выиграть от предоставления ложной информации о своих потребностях и/или финансовых возможностях. Следовательно, пользователи, оповещенные о том, что брокер ресурсов реализует рассматриваемый механизм, не заинтересованы в искажении информации, включенной в заявку.

Доказано также, что построенное предлагаемым способом распределение оптимально в следующем смысле. Если первые k победителей имеют суммарный (и удовлетворенный) спрос, R_k, то никакое допустимое распределение ресурса в количестве R_k не дает большую суммарную полезность пользователям и продавцу.